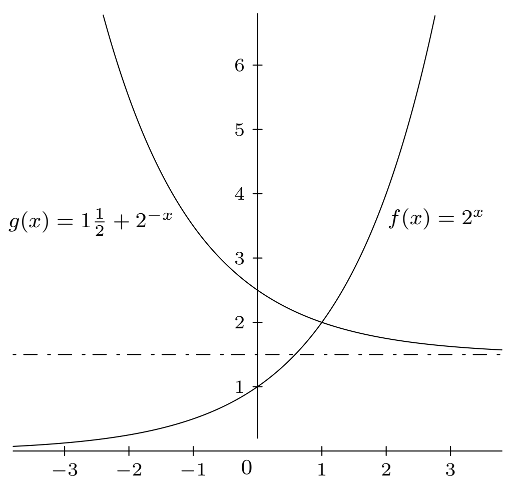
Wiskunde voor bachelor en master
Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden

Uitwerkingen diagnostische toets hoofdstuk 11

1. a. De grafiek van $f(x) = 2^x$ is een standaardgrafiek.

De grafiek van $g(x) = 1\frac{1}{2} + 2^{-x}$ ontstaat uit die van f door eerst in de y-as te spiegelen (dat levert $y = 2^{-x}$) en daarna over $1\frac{1}{2}$ naar boven te schuiven.
De lijn $y = 1\frac{1}{2}$ is een horizontale asymptoot van deze grafiek.



b. Het bereik van g volgt uit de grafiek: $\langle 1\frac{1}{2}, \infty\rangle$.

c. De x-coördinaat van het snijpunt van de grafieken bepaal je als volgt:

$$\begin{array}{lll} & 2^x = 1\frac{1}{2} + 2^{-x} & \{\text{Stel } 2^x = y \text{, dan is } 2^{-x} = \dfrac{1}{y}\} \\ \Leftrightarrow & y = 1\frac{1}{2} + \dfrac{1}{y} & \{\text{vermenigvuldig met } y\text{, voorwaarde } y \neq 0\} \\ \Leftrightarrow & y^2 = 1\frac{1}{2}y + 1 & \{\text{maal 2 en herleid op 0}\} \\ \Leftrightarrow & 2y^2 - 3y - 2 = 0 & \{\text{discriminant is } (-3)^2 - 4\cdot 2\cdot -2 = 25\} \\ \Leftrightarrow & y = \dfrac{3 \pm 5}{4} & \{y = 2^x\} \\ \Leftrightarrow & 2^x = 2 \text{ (oplossing } x = 1) & \vee \;\; 2^x = -\frac{1}{2} \text{ (geen oplossing voor } x\text{, want } 2^x > 0) \end{array}$$

Uit $f(1) = 2^1 = 2$ volgt het snijpunt (1,2), zie ook de grafiek.

2. a. $5^x = 25 \iff x = 2$

   b. $5^x = \frac{1}{5} \iff x = -1$

   c. $5^x = 1000 \iff x = {}^{5}\log 1000$

   d. $x^5 = 20 \iff x = \sqrt[5]{20}$

   e. $5^x = 1 \iff x = 0$

   f. $x = 0$, zie de onderstaande afleiding:

$$\begin{aligned} & 5^x + 5^{x+1} = 6 && \{\text{substitutie } 5^x = y, \text{ dan is } 5^{x+1} = 5{\cdot}5^x = 5y\} \\ \iff & y + 5y = 6 && \\ \iff & y = 1 && \{y = 5^x\} \\ \iff & 5^x = 1 && \\ \iff & x = 0 && \end{aligned}$$

3. a. ${}^{10}\log x = 0 \iff x = 10^0 = 1$

   b. ${}^{10}\log x^2 = 1 \iff x^2 = 10^1 = 10 \iff x = \sqrt{10} \ \vee \ x = -\sqrt{10}$

   c. ${}^{10}\log x^5 = 10 \iff x^5 = 10^{10} \iff x = 10^{\frac{10}{5}} = 10^2 = 100$

   d.

$$\begin{aligned} & {}^{10}\log 2x + {}^{10}\log(4x + 80) = 3 \quad \{\text{voorwaarde: } 2x > 0 \text{ en } 4x + 80 > 0\} \\ \iff & {}^{10}\log 2x(4x + 80) = 3 \\ \iff & 2x(4x + 80) = 10^3 \\ \iff & 8x^2 + 160x - 1000 = 0 \\ \iff & x^2 + 20x - 125 = 0 \\ \iff & (x + 25)(x - 5) = 0 \\ \iff & x = 5 \ \vee \ x = -25 \end{aligned}$$

De oplossing $x = -25$ voldoet niet, want $2{\cdot}-25 < 0$. We controleren de oplossing $x = 5$:

$$ {}^{10}\log 2{\cdot}5 + {}^{10}\log(4{\cdot}5 + 80) = {}^{10}\log 10 + {}^{10}\log 100 = 1 + 2 = 3$$

Dat klopt en de oplossing is dus $x = 5$.

4. a. $^7\log x + 7\,^{\frac{1}{7}}\log x = \,^7\log x + 7\cdot - \,^7\log x = -6\,^7\log x$

b. $2\,^3\log x - \,^3\log\sqrt{x} = 2\,^3\log x - \,^3\log x^{\frac{1}{2}} = 2\,^3\log x - \frac{1}{2}\,^3\log x = 1\frac{1}{2}\,^3\log x$

c. $^7\log x^3 - 2\,^7\log x = 3\,^7\log x - 2\,^7\log x = \,^7\log x$

d. $^4\log x + \,^2\log x = \dfrac{^2\log x}{^2\log 4} + \,^2\log x = \dfrac{^2\log x}{2} + \,^2\log x = 1\frac{1}{2}\,^2\log x$

e. $^2\log 8a - \,^2\log 4a^2 + 1 = \,^2\log 8a - \,^2\log 4a^2 + \,^2\log 2 = \,^2\log\dfrac{8a\cdot 2}{4a^2} = \,^2\log\dfrac{4}{a} \quad (= 2 - \,^2\log a)$

f. $^2\log 34 - \,^2\log 17 = \,^2\log\dfrac{34}{17} = \,^2\log 2 \quad (= 1)$

5. a. Gegeven zijn de startwaarde 100 euro op $t = 0$ (in jaren) en het groeipercentage van 3 %.

Geven we het bedrag na t jaar aan met B dan volgt hieruit:

$B = 100\cdot 1{,}03^t$ euro, met t in jaren.

Dus na 10 jaar geldt $B = 100\cdot 1{,}03^{10} =$ € 134,39.

b. Berekening van de verdubbeltijd:

$$
\begin{array}{lll}
 & (1{,}03)^t = 2 & \{\text{neem van beide zijden de logaritme}\} \\
\Leftrightarrow & \log 1{,}03^t = \log 2 & \{\text{eigenschap van logaritmen}\} \\
\Leftrightarrow & t\log 1{,}03 = \log 2 & \{\text{deel door } \log 1{,}03\} \\
\Leftrightarrow & t = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}03} \approx 23{,}5\,\text{jaar} &
\end{array}
$$

Of nog korter:

$$
\begin{array}{lll}
 & (1{,}03)^t = 2 & \{\text{definitie van de logaritme}\} \\
\Leftrightarrow & t = \,^{1{,}03}\log 2 \approx 23{,}5\,\text{jaar} &
\end{array}
$$

c. Bij een rentepercentage p is de formule: $B = 100\cdot(1 + \dfrac{p}{100})^t$

Is na 20 jaar de inleg verdubbeld, dan geldt:

$$(1 + \frac{p}{100})^{20} = 2$$

De vergelijking $x^{20} = 2$ heeft twee oplossingen: $x = \sqrt[20]{2} \vee x = -\sqrt[20]{2}$.

Omdat $1 + \dfrac{p}{100} > 0$ voldoet alleen de eerste hiervan, dus:

$$1 + \frac{p}{100} = \sqrt[20]{2} \approx 1{,}0353$$

Dit levert voor p als percentage 3,53 % op.

6. a. ${}^{2}\log 10 = 3{,}32$

   b. ${}^{\sqrt{2}}\log 10 = 6{,}64$

   c. ${}^{\sqrt{2}}\log 0{,}25 = -4$

   d. ${}^{1000}\log 10 = 0{,}333$

7. Gebruik in $3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0$ de subsitutie $3^x = y$, dan staat er $y^2 - 3y + 2 = 0$.
   De ontbinding $(y-1)(y-2) = 0$ levert $y = 1 \ \vee \ y = 2$, dus $3^x = 1 \ \vee \ 3^x = 2$.

   Dit geeft als resultaat $x = {}^{3}\log 1 = 0$ of $x = {}^{3}\log 2 \approx 0{,}63$.