Wiskunde voor bachelor en master

Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden

www.syntaxmedia.nl

Uitwerkingen diagnostische toets hoofdstuk 12

1. a. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5 \;\Rightarrow\; f'(x) = 4x - 3$

   b. $g(x) = x^5 - x\sqrt{x} = x^5 - x^{1\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; g'(x) = 5x^4 - 1\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} = 5x^4 - 1\frac{1}{2}\sqrt{x}$

   c. $h(x) = \dfrac{5}{x^5} - \sqrt[5]{x} + 1 = 5x^{-5} - x^{\frac{1}{5}} + 1 \;\Rightarrow\; h'(x) = -25x^{-6} - \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = -\dfrac{25}{x^6} - \dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

   d. $y = t + 5\sin t - 6\cos t \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 + 5\cos t + 6\sin t$

   e. $y = \dfrac{x+1}{x\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1\cdot x\sqrt{x} - (x+1)\cdot 1\frac{1}{2}\sqrt{x}}{(x\sqrt{x})^2} = \dfrac{(x - 1\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2})\sqrt{x}}{x^3} = \dfrac{-\frac{1}{2}x - 1\frac{1}{2}}{x^2\sqrt{x}} = -\dfrac{x+3}{2x^2\sqrt{x}}$

   f. $y = x\cos x \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x - x\sin x$

2. a. $f(x) = \dfrac{1}{\cos 2x} \;\Rightarrow\; f'(x) = -\dfrac{-2\sin 2x}{\cos^2 2x} = \dfrac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$

   b. $g(x) = 1 + \sin\sqrt{x} \;\Rightarrow\; g'(x) = 0 + \cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

   c. $h(x) = x\tan(x^2+1) \;\Rightarrow\; h'(x) = 1\cdot\tan(x^2+1) + x\cdot\dfrac{1}{\cos^2(x^2+1)}\cdot 2x = \tan(x^2+1) + \dfrac{2x^2}{\cos^2(x^2+1)}$

   d. $y = (3\tan r - 1)^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}r} = 2(3\tan r - 1)\cdot(\text{de afgeleide van } 3\tan r - 1)$

   $$= 2(3\tan r - 1)\cdot\frac{3}{\cos^2 r} = \frac{6(3\tan r - 1)}{\cos^2 r}$$

   e. $y = 1 + \sqrt{t^2+1} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0 + \dfrac{1}{2\sqrt{t^2+1}}\cdot 2t = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$

   f. $y = \sin t\sin 2t \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \cos t\cdot\sin 2t + \sin t\cdot\cos 2t\cdot 2 = \cos t\sin 2t + 2\sin t\cos 2t$

3. Voor $f(x) = \tan x$ geldt $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, dus $f'(\frac{1}{4}\pi) = \dfrac{1}{\cos^2 \frac{1}{4}\pi} = \dfrac{1}{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$.

   De helling van de raaklijn is dus 2 en de vergelijking is van de vorm $y = 2x + b$.

   Verder is $\tan \frac{1}{4}\pi = 1$ en gaat de raaklijn dus door het punt $(\frac{1}{4}\pi, 1)$.

   Invullen in de vergelijking geeft:

   $$1 = \tfrac{1}{2}\pi + b$$

   Dus $b = 1 - \frac{1}{2}\pi$ en de vergelijking van de raaklijn is:

   $$y = 2x + 1 - \tfrac{1}{2}\pi$$

4. a. Met de regel $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$ volgt voor $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$ dat $f'(x) = -\dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2}$.

   Je kunt dit schrijven als $f'(x) = -3 \cdot (\dfrac{x}{x^3+1})^2$

   Omdat een kwadraat niet negatief is, is -3 keer een kwadraat niet positief. De afgeleide is dus nergens positief en de functie is dan nergens stijgend.

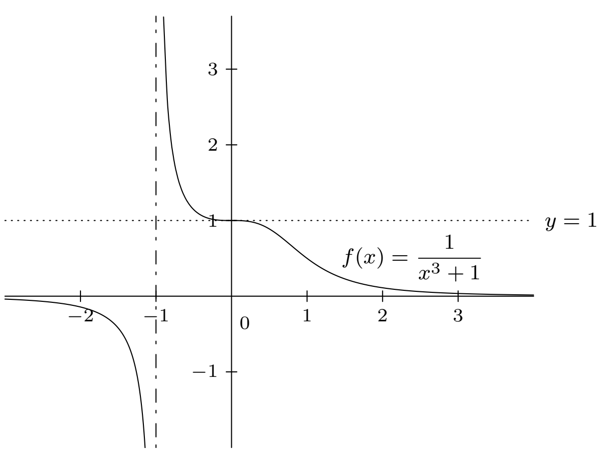
   b. De afgeleide is 0 precies dan als $x = 0$.

   Uit $f(0) = \dfrac{1}{0^3+1} = 1$ volgt dat dit in het punt $(0,1)$ van de grafiek is.

   Een horizontale lijn heeft vergelijking $y = b$ en in dit geval is de vergelijking van de raaklijn dus

   $$y = 1$$

   Als illustratie is onderstaand de grafiek van f gegeven. De lijn $y = 1$ is gestippeld weergegeven. Verder is $x = -1$ verticale asymptoot en $y = 0$ horizontale asymptoot.



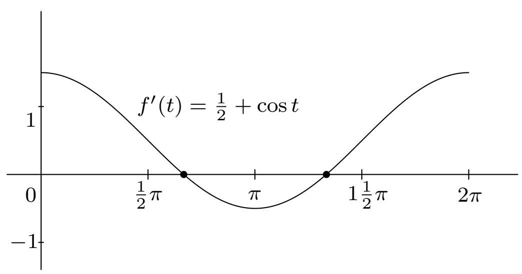
5. a. $f(t) = \frac{1}{2}t + \sin t \;\Rightarrow\; f'(t) = \frac{1}{2} + \cos t$

We bepalen wanneer de afgeleide 0 is:

$$\begin{array}{lll} & \cos t = -\frac{1}{2} & \{\cos \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}\} \\ \Leftrightarrow & t = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi \;\vee\; t = -\frac{2}{3}\pi + 2k\pi & \{\text{domein is } [0{,}2\pi]\} \\ \Leftrightarrow & t = \frac{2}{3}\pi \;\vee\; t = 1\frac{1}{3}\pi & \end{array}$$

De afgeleide heeft dus $\frac{2}{3}\pi$ en $1\frac{1}{3}\pi$ als nulpunten.

De grafiek van $f'(t) = \frac{1}{2} + \cos t$ ontstaat uit die van de cosinus door deze over $\frac{1}{2}$ naar boven te schuiven en de nulpunten zijn $\frac{2}{3}\pi$ en $1\frac{1}{3}\pi$:



Uit het voorgaande volgt dat de afgeleide positief is op $[0, \frac{2}{3}\pi\rangle$ en op $\langle 1\frac{1}{3}\pi, 2\pi]$ en negatief op $\langle \frac{2}{3}\pi, 1\frac{1}{3}\pi\rangle$.

Dus de functie stijgt op $[0, \frac{2}{3}\pi\rangle$, daalt daarna op $\langle \frac{2}{3}\pi, 1\frac{1}{3}\pi\rangle$ en stijgt weer op $\langle 1\frac{1}{3}\pi, 2\pi]$.

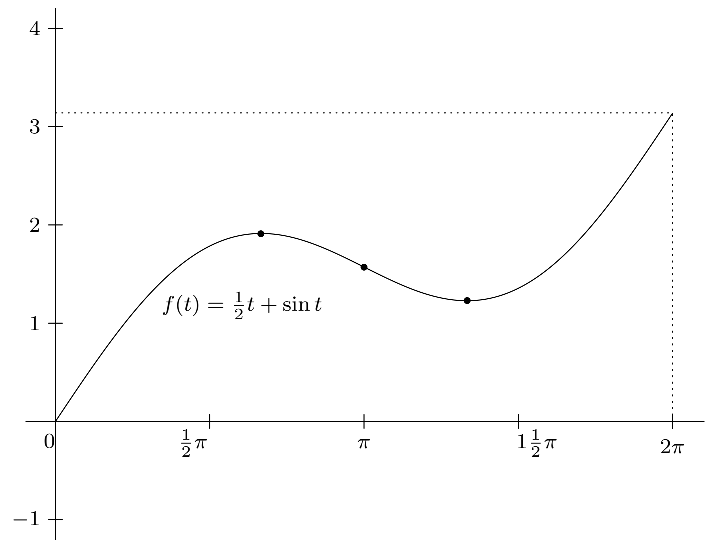
5 b. De eerste top (een lokaal maximum) is voor $t = \frac{2}{3}\pi$.

Uit $f(\frac{2}{3}\pi) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\pi + \sin\frac{2}{3}\pi = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}$ volgt dat dit het punt $(\frac{2}{3}\pi, \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3})$ is.

De tweede top (een lokaal minimum) is voor $t = 1\frac{1}{3}\pi$.

Uit $f(1\frac{1}{3}\pi) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi + \sin 1\frac{1}{3}\pi = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}$ volgt dat dit het punt $(1\frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3})$ is.

5 c. De grafiek van f staat onderstaand. De toppen kun je met een rekenmachine benaderen en zijn dan (2,1, 1,9) en (4,2, 1,2). De grafiek is puntsymmetrisch ten opzichte van het punt $(\pi, \frac{1}{2}\pi)$.



6. a. De afgelegde weg is gegeven door $s = 3t^2 - 0{,}5t^3$ (t in seconden, s in meter).

Dan geldt voor de snelheid: $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 6t - 1{,}5t^2$

$v = 0 \;\Leftrightarrow\; t(6 - 1{,}5t) = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 0 \vee t = 4$

Dus bij aanvang ($t = 0$) en na afloop ($t = 4$) van de sprint is de snelheid 0.

b. De snelheid $v = 6t - 1{,}5t^2$ heeft als grafiek een parabool, met een maximum voor $t = 2$ (in het midden van de nulpunten $t = 0$ en $t = 4$).

Op $t = 2$ geldt:

$$v = 6\cdot 2 - 1{,}5\cdot 2^2 = 12 - 6 = 6\,\mathrm{m/s} = 6\cdot 3600\,\mathrm{m/u} = 21600\,\mathrm{m/u} = 21{,}6\,\mathrm{km/u}$$

c. De versnelling $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6 - 3t$

Merk op dat de versnelling bij de start ($t = 0$) het grootst is en daarna afneemt.

Op $t = 3$ is de versnelling $6 - 3\cdot 3 = -3\,\mathrm{m/s^2}$: de persoon is aan het vertragen.