Wiskunde voor bachelor en master

Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden

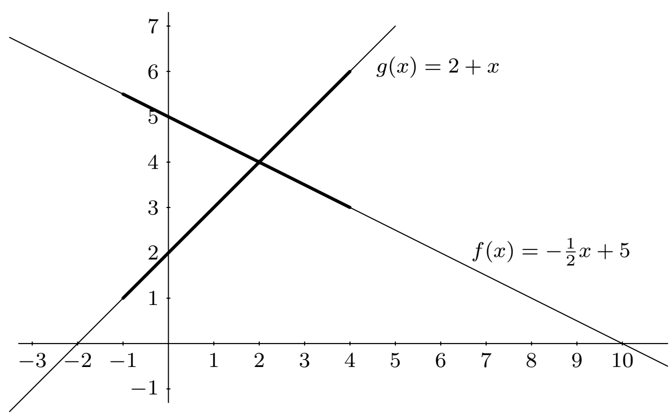
www.syntaxmedia.nl

Uitwerkingen diagnostische toets hoofdstuk 9

1. a. De grafiek van $f(x) = -\frac{1}{2}x + 5$ is een rechte lijn met helling $-\frac{1}{2}$ en gaat door de punten (0,5) en (10,0).

De grafiek van $g(x) = 2 + x$ is ook een rechte lijn, deze heeft helling 1 en gaat door de punten (0,2) en (−2,0).

Dit levert de onderstaande figuur:



1. b. De x-coördinaat van het snijpunt van de grafieken vind je door de functies aan elkaar gelijk te stellen:

$$\begin{aligned} & -\tfrac{1}{2}x + 5 = 2 + x && \{\text{maal } 2\} \\ \Leftrightarrow\quad & -x + 10 = 4 + 2x && \{2x \text{ naar links, } 10 \text{ naar rechts}\} \\ \Leftrightarrow\quad & -3x = -6 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 2 \end{aligned}$$

Uit $g(2) = 2 + 2 = 4$ volgt de y-coördinaat van het snijpunt. Het snijpunt is dus (2,4).

1. c. In de grafiek zijn de functies beperkt tot domein $[-1,4\rangle$ iets dikker getekend.

Uit $f(-1) = -\frac{1}{2}\cdot -1 + 5 = 5\frac{1}{2}$ en $f(4) = -\frac{1}{2}\cdot 4 + 5 = 3$ volgt voor f bereik $\langle 3,5\frac{1}{2}]$.

Uit $g(-1) = 2 - 1 = 1$ en $g(4) = 2 + 4 = 6$ volgt voor g bereik $[1,6\rangle$.

2. a. Voor het bepalen van de grafiek herschrijven we de functie met behulp van kwadraatafsplitsen:

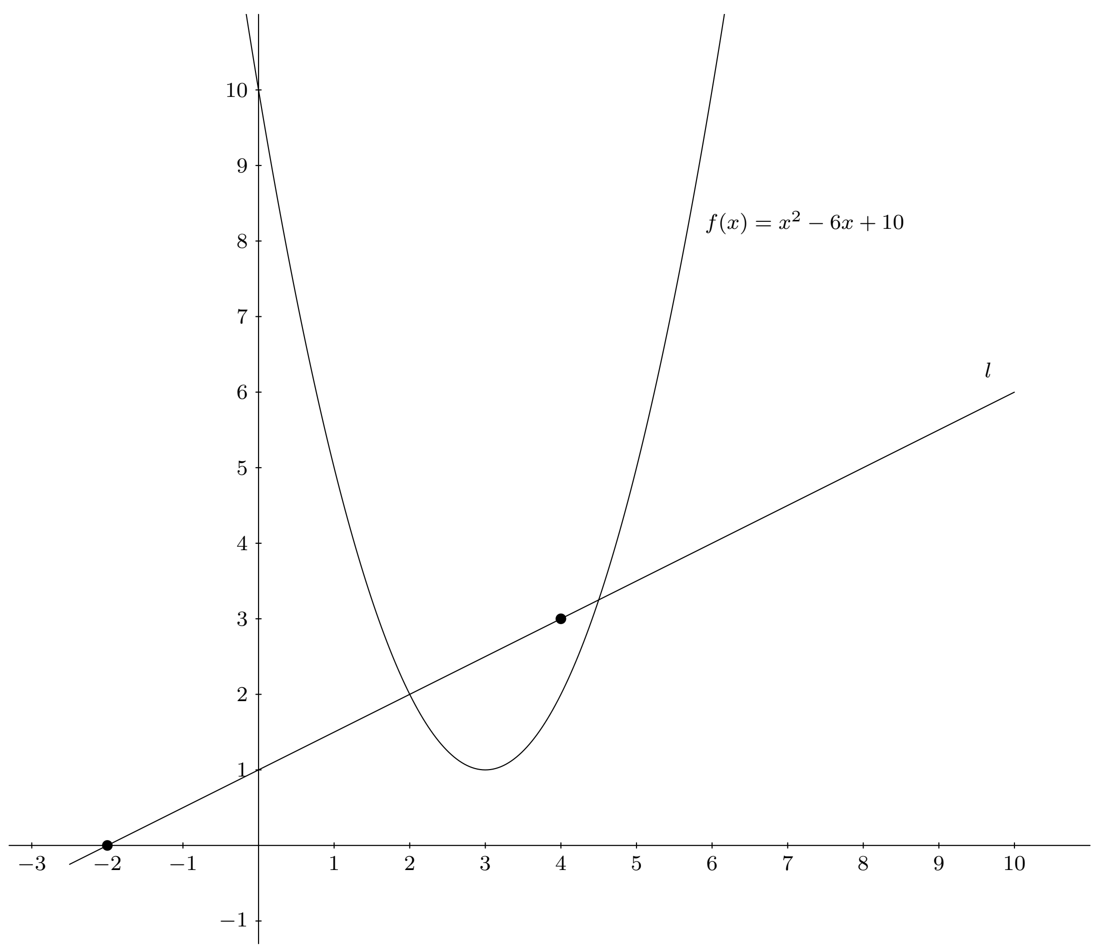
$$x^2 - 6x + 10 = (x^2 - 6x + 9) - 9 + 10 = (x - 3)^2 + 1$$

Daaruit volgt dat het een dalparabool betreft met minimum 1 en top (3,1). Er zijn dus geen snijpunten met de x-as. Het snijpunt met de y-as is (0,10). Zie de figuur onder aan de pagina.

2. b. In de figuur is lijn l door de punten $(-2{,}0)$ en $(4{,}3)$ getekend.
Uit de figuur is al te zien dat (2,2) waarschijnlijk een snijpunt is.
De helling van l volgt uit:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 0}{4 - (-2)} = \tfrac{3}{6} = \tfrac{1}{2}$$

Lijn l heeft dan als vergelijking $y = \frac{1}{2}x + b$.
Invullen van $(-2{,}0)$ levert $0 = -1 + b$, dus $b = 1$ en de vergelijking van l is $y = \frac{1}{2}x + 1$.



De berekening van de x-coördinaat van de snijpunten gaat als volgt:

$$
\begin{array}{lll}
 & x^2 - 6x + 10 = \frac{1}{2}x + 1 & \{\text{maal } 2\} \\
\Leftrightarrow & 2x^2 - 12x + 20 = x + 2 & \{\text{herleid op } 0\} \\
\Leftrightarrow & 2x^2 - 13x + 18 = 0 & \{\text{discriminant is } (-13)^2 - 4{\cdot}2{\cdot}18 = 169 - 144 = 25\} \\
\Leftrightarrow & x_{1,2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{25}}{4} & \\
\Leftrightarrow & x_{1,2} = \dfrac{13 \pm 5}{4} & \\
\Leftrightarrow & x = \frac{18}{4} = 4\frac{1}{2} \ \vee \ x = \frac{8}{4} = 2 &
\end{array}
$$

Invullen in de vergelijking van de lijn levert: $y = \frac{1}{2}{\cdot}4\frac{1}{2} + 1 = 3\frac{1}{4}$ en $y = \frac{1}{2}{\cdot}2 + 1 = 2$.
De snijpunten zijn $(4\frac{1}{2},3\frac{1}{4})$ en (2,2).

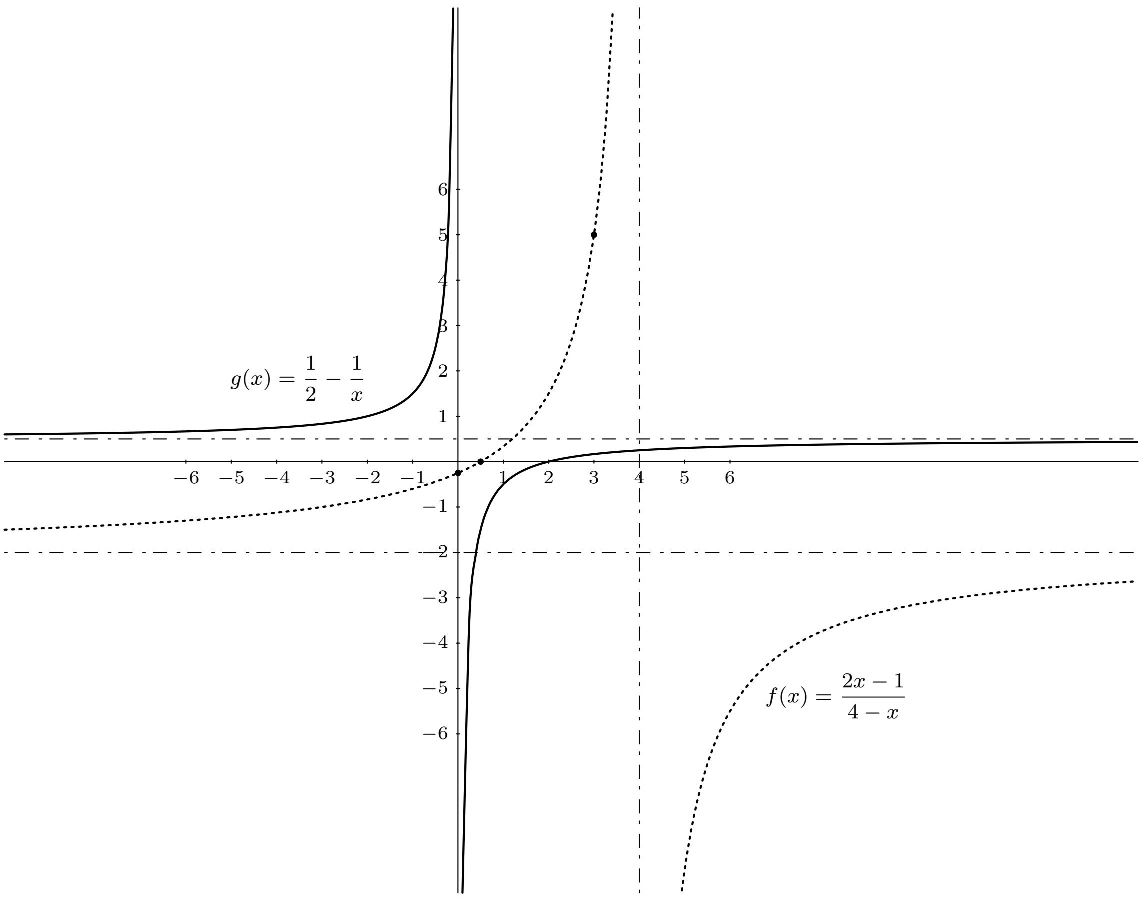
2. c. De berekende punten kloppen met de grafiek.

3. a. Voor de functie $f(x) = \dfrac{2x-1}{4-x}$ geldt dat de noemer 0 is voor $x = 4$, dus de lijn $x = 4$ is verticale asymptoot.
De horizontale asymptoot vind je met:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{4-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{1}{x}}{\frac{4}{x}-1} = \frac{2-0}{0-1} = -2$$

Dus $y = -2$ is horizontale asymptoot. Verder geldt $f(0) = -\frac{1}{4}$, $f(\frac{1}{2}) = 0$ en $f(3) = 5$.
In het navolgende is de grafiek van f gestippeld getekend en zijn deze drie punten ingetekend.

De grafiek van $g(x) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{x}$ ontstaat uit die van $y = \dfrac{1}{x}$ door eerst te spiegelen in de x-as en daarna over $\frac{1}{2}$ naar boven te schuiven. Deze grafiek is als doorlopende lijn getekend.



3. b. Uit de figuur is duidelijk dat de grafieken elkaar niet snijden.

Berekening van een mogelijk snijpunt levert:

$$
\begin{array}{lll}
 & \frac{2x-1}{4-x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} & \{\text{werk rechterlid uit door gelijknamig maken}\} \\
\Leftrightarrow & \frac{2x-1}{4-x} = \frac{x-2}{2x} & \{\text{kruislings vermenigvuldigen}\} \\
\Leftrightarrow & 2x(2x-1) = (x-2)(4-x) & \{\text{haakjes uitwerken}\} \\
\Leftrightarrow & 4x^2 - 2x = -x^2 + 6x - 8 & \{\text{op 0 herleiden}\} \\
\Leftrightarrow & 5x^2 - 8x + 8 = 0 & \{\text{discriminant is } (-8)^2 - 4\cdot 5\cdot 8 = 64 - 160 < 0\}
\end{array}
$$

Omdat de discriminant negatief is, heeft deze vergelijking geen oplossingen. De grafieken hebben dus geen snijpunt.

3. c. Zie de grafiek van f: de waarde 3 ligt links van de asymptoot $x = 4$ en daarom betreft dit alleen de linkertak van deze hyperbool.

De functiewaarden zijn daar groter dan -2 en ten hoogste $f(3) = \dfrac{2{\cdot}3-1}{4-3} = 5$.

Het bereik van f is in dat geval dus gelijk aan $\langle -2{,}5]$.

4. Een verticale asymptoot vind je door te bepalen wanneer een noemer 0 is.
Een horizontale asymptoot vind je door naar zeer grote waarden van x te kijken ($\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$).

a.	$f(x) = 2 + \dfrac{1}{x+1}$	verticaal: $x = -1$	horizontaal: $y = 2$
b.	$f(x) = \dfrac{3x-1}{4x+1}$	verticaal: $x = -\frac{1}{4}$	horizontaal: $y = \frac{3}{4}$
c.	$f(x) = -\dfrac{x}{x-1}$	verticaal: $x = 1$	horizontaal: $y = -1$
d.	$f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$	verticaal: $x = 1$	horizontaal: $y = -1$
e.	$f(x) = 3 - \dfrac{2}{x-2}$	verticaal: $x = 2$	horizontaal: $y = 3$
f.	$f(x) = \dfrac{1}{3-x}$	verticaal: $x = 3$	horizontaal: $y = 0$