Wiskunde voor bachelor en master
Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden

Uitwerkingen hoofdstuk 10

10.2.1

1. Voor scherpe hoek α geldt:

a. $\sin\alpha = 0{,}8 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \boxed{\sin^{-1}}\,0{,}8 = 53{,}1°$

b. $\sin\alpha = 0{,}2 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \boxed{\sin^{-1}}\,0{,}2 = 11{,}5°$

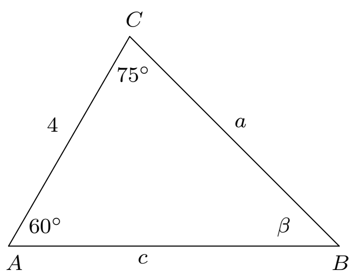
c. $\cos\alpha = 0{,}8 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \boxed{\cos^{-1}}\,0{,}8 = 36{,}9°$

d. $\cos\alpha = 0{,}2 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \boxed{\cos^{-1}}\,0{,}2 = 78{,}5°$

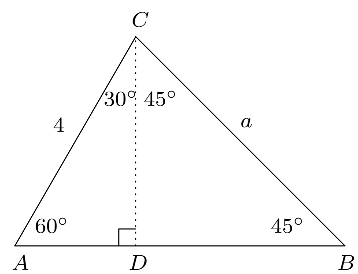
e. $\tan\alpha = \frac{1}{3} \;\Leftrightarrow\; \alpha = \boxed{\tan^{-1}}\,\frac{1}{3} = 18{,}4°$

f. $\tan\alpha = 3 \;\Leftrightarrow\; \alpha = \boxed{\tan^{-1}}\,3 = 71{,}6°$

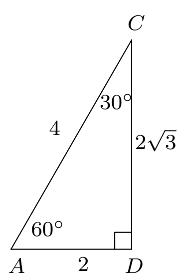
2. Gegeven is de driehoek van figuur 10.10a. Gevraagd worden hoek β en de zijden a en c.

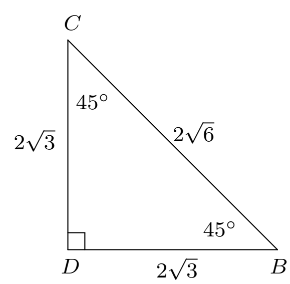


Figuur 10.10a



Hoek $\beta = 180° - (60° + 75°) = 45°$. Trek de hoogtelijn CD vanuit C, dan geldt:
$\angle ACD = 90° - 60° = 30°$ en $\angle BCD = 90° - \beta = 45°$.
We hebben nu $\triangle ADC$ met de verhoudingen $\frac{1}{2} : \frac{1}{2}\sqrt{3} : 1$ en daaruit volgt: $AD = 2$ en $CD = 2\sqrt{3}$.

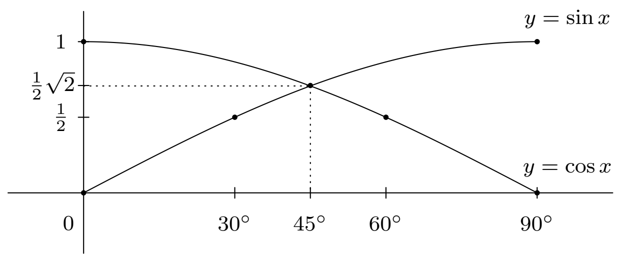




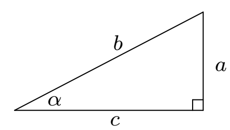
In $\triangle BDC$ zijn de verhoudingen $\frac{1}{2}\sqrt{2} : \frac{1}{2}\sqrt{2} : 1$ (ofwel $1 : 1 : \sqrt{2}$) en met $CD = 2\sqrt{3}$ volgt:
$BD = CD = 2\sqrt{3}$ en $BC = BD\sqrt{2} = 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{6}$

Resultaat: $a = 2\sqrt{6}$, $c = AD + DB = 2 + 2\sqrt{3}$ en $\beta = 45°$.

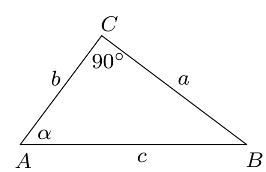
3. De grafieken van $y = \sin x$ en $y = \cos x$ in één figuur, met $0 \le x \le 90°$ en op de x-as $30°$ als eenheid:



4. Bewijs (zie nevenstaand figuur): $\tan\alpha = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)}{\left(\dfrac{c}{b}\right)} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$



5. Bij deze opgave wordt gebruikgemaakt van figuur 10.10b uit het boek:



Uit $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$, $\tan\alpha = \dfrac{a}{b}$ volgt: $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$, $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$, $a = b\tan\alpha$ en $b = \dfrac{a}{\tan\alpha}$.
Hiermee zijn de opgaven als volgt op te lossen:

a. $\alpha = 50°$ en $b = 10 \quad\Rightarrow\quad c = \dfrac{b}{\cos\alpha} = \dfrac{10}{\cos 50°} \approx 15{,}56$ en $a = b\tan\alpha = 10 \cdot \tan 50° \approx 11{,}92$

b. $\alpha = 55°$ en $b = 10 \quad\Rightarrow\quad c = \dfrac{b}{\cos\alpha} = \dfrac{10}{\cos 55°} \approx 17{,}43$ en $a = b\tan\alpha = 10 \cdot \tan 55° \approx 14{,}28$

c. $\cos\alpha = 0{,}8$ en $b = 3 \quad\Rightarrow\quad c = \dfrac{b}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{0{,}8} = 3{,}75$ en $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{3{,}75^2 - 3^2} = 2{,}25$

d. $\sin\alpha = 0{,}6$ en $a = 4 \quad\Rightarrow\quad c = \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{4}{0{,}6} = 6\frac{2}{3}$ en $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(6\frac{2}{3})^2 - 4^2} = 5\frac{1}{3}$

e. $\tan\alpha = 1\frac{1}{3}$ en $a = 3 \quad\Rightarrow\quad b = \dfrac{a}{\tan\alpha} = \dfrac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$ en $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (\frac{9}{4})^2} = \sqrt{9 + \frac{81}{16}}$

$$= \sqrt{\tfrac{144}{16} + \tfrac{81}{16}} = \sqrt{\tfrac{225}{16}} = \tfrac{15}{4} = 3\tfrac{3}{4}$$

f. $a = 4$ en $b = 3 \quad\Rightarrow\quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

6. Gegeven is de scherphoekige driehoek in figuur 10.10c. Toon aan:

$$c = b\cos\alpha + a\cos\beta$$

Bewijs:

Zie de nevenstaande figuur. Trek de hoogtelijn CD uit C op AB. Dan geldt:

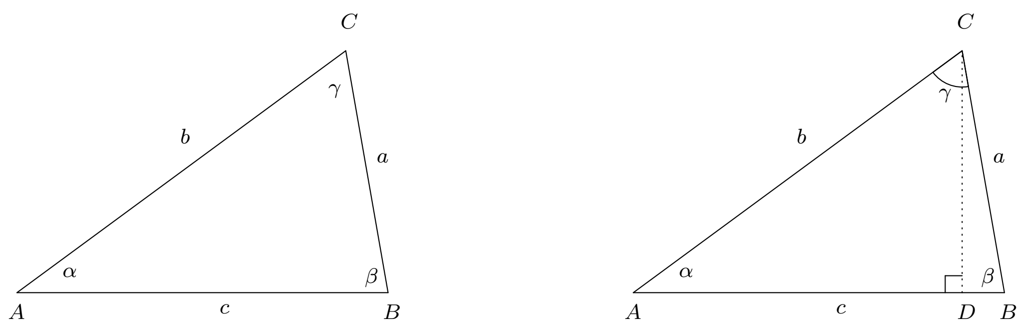
$$\cos\alpha = \frac{AD}{b} \quad \text{en} \quad \cos\beta = \frac{BD}{a}$$

Dus ook:

$$AD = b\cdot\cos\alpha \quad \text{en} \quad BD = a\cdot\cos\beta$$

Hieruit volgt:

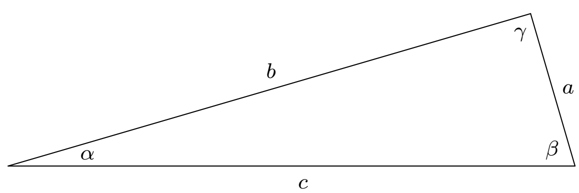
$$c = AD + BD = b\cos\alpha + a\cos\beta$$



Figuur 10.10c

10.3.1

1. Van een driehoek zijn de lengtes van de zijden 7, 24 en 25. Bepaal de hoeken van de driehoek.



Noem de zijden a, b en c (zie de figuur), met $a = 7$, $b = 24$ en $c = 25$.
De cosinusregel geeft voor zijde a:

$$\begin{aligned} & a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ \Leftrightarrow\quad & 7^2 = 24^2 + 25^2 - 2{\cdot}24{\cdot}25\cos\alpha \\ \Leftrightarrow\quad & 49 = 576 + 625 - 1200\cos\alpha \\ \Leftrightarrow\quad & \cos\alpha = \frac{1152}{1200} = 0{,}96 \end{aligned}$$

Omdat α een scherpe hoek is, volgt hieruit: $\alpha = \boxed{\cos^{-1}} 0{,}96 = 16{,}3°$. Voor zijde b geldt:

$$\begin{aligned} & b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ \Leftrightarrow\quad & 24^2 = 7^2 + 25^2 - 2{\cdot}7{\cdot}25\cos\beta \\ \Leftrightarrow\quad & 576 = 49 + 625 - 350\cos\beta \\ \Leftrightarrow\quad & \cos\beta = \frac{98}{350} = 0{,}28 \end{aligned}$$

Omdat β een scherpe hoek is, volgt hieruit: $\beta = \boxed{\cos^{-1}} 0{,}28 = 73{,}7°$. Ten slotte zijde c:

$$\begin{aligned} & c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ \Leftrightarrow\quad & 625 = 49 + 576 - 2{\cdot}7{\cdot}24\cos\gamma \\ \Leftrightarrow\quad & \cos\gamma = 0 \end{aligned}$$

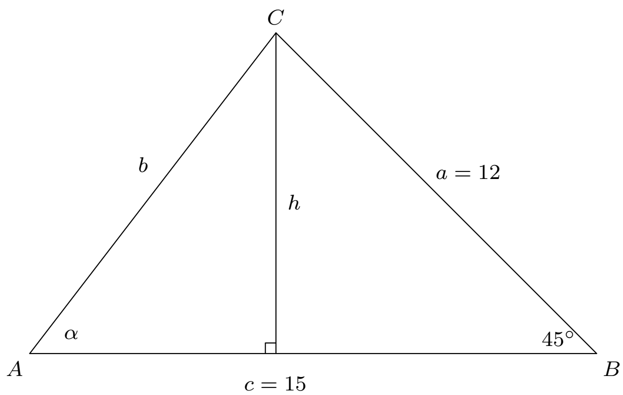
Blijkbaar geldt $\gamma = 90°$! Het resultaat is $\alpha = 16{,}3°$, $\beta = 73{,}7°$ en $\gamma = 90°$.

Dit klopt met de som van de hoeken in een driehoek: $\alpha + \beta + \gamma = 16{,}3° + 73{,}7° + 90° = 180°$.
Ook geldt $a^2 + b^2 = c^2$ (de stelling van Pythagoras), dus γ is inderdaad exact een rechte hoek.

2. Van ΔABC is $a = 12$, $c = 15$ en $\beta = 45°$. Bereken zijde b, hoek α, de lengte van de hoogtelijn uit C en de oppervlakte van de driehoek.

   Oplossing:

   Teken $\triangle ABC$ met daarin de gegevens en teken ook de hoogtelijn h uit C:



We berekenen b met de cosinusregel:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2{\cdot}a{\cdot}c{\cdot}\cos\beta = 12^2 + 15^2 - 2{\cdot}12{\cdot}15\cos 45° = 144 + 225 - 360{\cdot}\tfrac{1}{2}\sqrt{2} = 114{,}44$$

Dus $b = \sqrt{114{,}44} = 10{,}70$

Nu kun je α berekenen met de sinusregel: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin 45°}$, ofwel $\dfrac{\sin\alpha}{a} = \dfrac{\sin 45°}{b}$ en dat geeft:

$$\sin\alpha = \frac{a{\cdot}\sin 45°}{b} = \frac{12{\cdot}\frac{1}{2}\sqrt{2}}{10{,}70} = 0{,}79$$

De rekenmachine geeft $\alpha = \boxed{\sin^{-1}}\,0{,}79 = 52{,}2°$.

De oppervlakte van een driehoek is gelijk aan de halve hoogte maal de basis.
Voor de hoogte h geldt: $h = 12{\cdot}\sin 45° = 6\sqrt{2}$ en de basis $c = 15$, dus:

oppervlakte $\triangle ABC = \frac{1}{2}{\cdot}h{\cdot}c = 3\sqrt{2}{\cdot}15 = 45\sqrt{2} \approx 63{,}64$

3. Laat zien dat voor $\gamma = 90°$ uit de cosinusregel de stelling van Pythagoras ($a^2 + b^2 = c^2$) volgt.

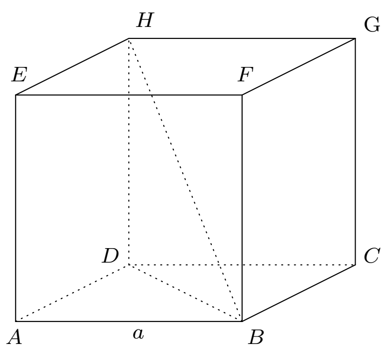
   Bewijs:

   Er geldt $\cos 90° = 0$ en de cosinusregel geeft in dat geval:

   $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - 0 = a^2 + b^2$$

   En dat is de stelling van Pythagoras.

4. In figuur 10.14 staat een kubus getekend met ribbe a. Gevraagd wordt om de lengte van de diagonaal HB exact te berekenen. Teken daartoe eerst het vierkant $ABCD$ en bereken de lengte van BD. Teken daarna de rechthoek $DBFH$ en bereken dan de lengte van diagonaal HB daarvan. Bereken ten slotte met behulp van je rekenmachine de hoeken $\angle HBD$ en $\angle DHB$.



Figuur 10.14

Oplossing: Zie de onderstaande figuren. De lengte van BD volgt uit de stelling van Pythagoras:

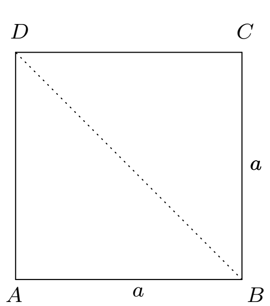
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

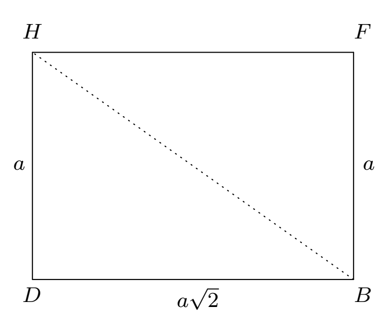
Dus $BD = a\sqrt{2}$. De lengte van HB volgt ook uit de stelling van Pythagoras:

$$HB^2 = DB^2 + DH^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$$

Dus $HB = a\sqrt{3}$.

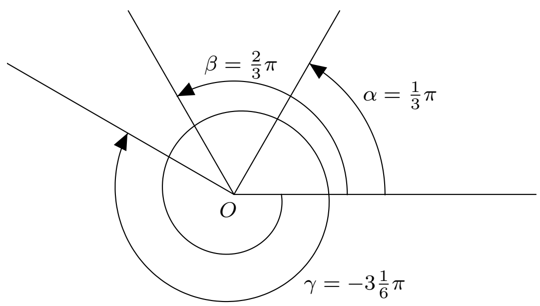
$$\angle HBD = \boxed{\tan^{-1}}\ \frac{a}{a\sqrt{2}} = \boxed{\tan^{-1}}\ \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 35{,}3° \quad \text{en} \quad \angle DHB = \boxed{\tan^{-1}}\ \sqrt{2} \approx 54{,}7°.$$



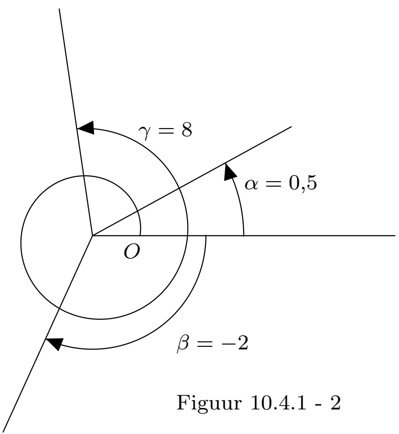


10.4.1

1. a. $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ b. $\beta = \frac{2}{3}\pi$ c. $\gamma = -3\frac{1}{6}\pi$



Figuur 10.4.1 - 1



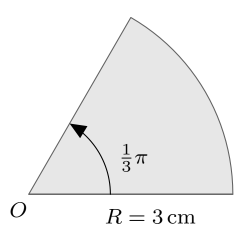
Figuur 10.4.1 - 2

De hoeken zijn in figuur 10.4.1 - 1 getekend. Hoek α correspondeert met 60°, hoek β met 120°. Hoek γ krijg je door met de klok mee anderhalf keer rond te draaien plus nog $\frac{1}{6}\pi$ (= 30°).

2. a. $\alpha = 0{,}5$ b. $\beta = -2$ c. $\gamma = 8$

   De hoeken zijn in figuur 10.4.1 - 2 getekend. Merk op dat $\gamma - 2\pi = 8 - 2\pi \approx 1{,}7$ ($\approx 98°$)

3. Gegeven is een cirkelsector met middelpuntshoek $\frac{1}{3}\pi$ en straal 3 cm. Teken deze sector en bepaal de lengte van de boog en de grootte van de sectoroppervlakte.

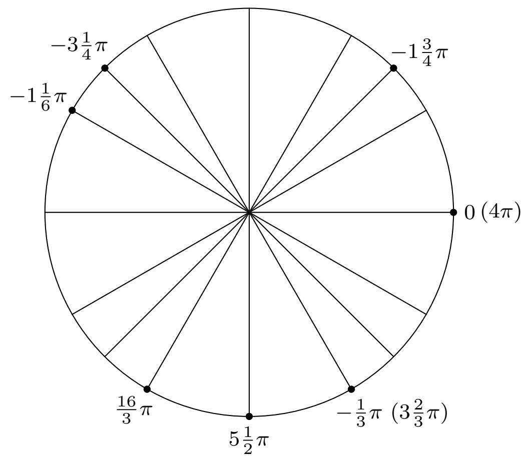


Figuur 10.4.1 - 3

Zie figuur 10.4.1 - 3. De lengte van de boog is $\phi \cdot R = \frac{1}{3}\pi \cdot 3 = \pi\,\text{cm}$ ($\approx 3{,}14\,\text{cm}$).
De sectoroppervlakte is $\frac{1}{2}\phi \cdot R^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 = \frac{3}{2}\pi\,\text{cm}^2$ ($\approx 4{,}71\,\text{cm}^2$).

10.5.1

1. In de eenheidscirkel zijn de gevraagde hoeken aangegeven:



Dit leidt tot de onderstaande tabel.

In het boek staan bij het antwoord op deze opgave *drie fouten* in de tabel:

$$\sin(5\tfrac{1}{2}\pi) = \sin(1\tfrac{1}{2}\pi) = -1 \quad \text{(en niet 1)}$$

$$\sin(\tfrac{16}{3}\pi) = \sin(5\tfrac{1}{3}\pi) = \sin(1\tfrac{1}{3}\pi) = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \quad \text{(en niet } \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\text{)}$$

$$\tan(\tfrac{16}{3}\pi) = \frac{\sin(\frac{16}{3}\pi)}{\cos(\frac{16}{3}\pi)} = \frac{-\frac{1}{2}\sqrt{3}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \quad \text{(en niet } -\sqrt{3}\text{)}$$

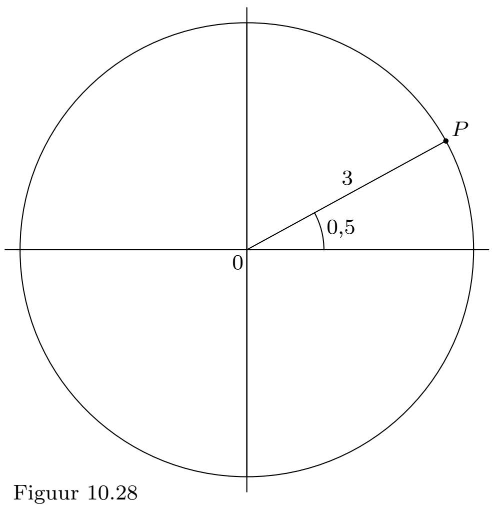
De correct ingevulde tabel:

x	$-\frac{1}{3}\pi$	0	$-3\frac{1}{4}\pi$	$5\frac{1}{2}\pi$	$-1\frac{1}{6}\pi$	$-3\frac{3}{4}\pi$	$\frac{16}{3}\pi$	4π	$3\frac{2}{3}\pi$
$\sin x$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$
$\cos x$	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\tan x$	$-\sqrt{3}$	0	-1	$-$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	0	$-\sqrt{3}$

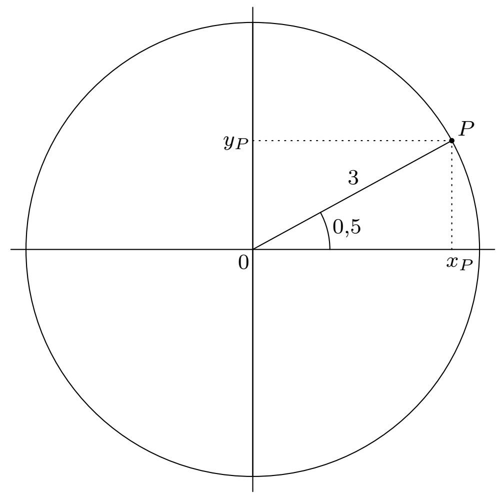
2. Gegeven is figuur 10.28.

   Punt P ligt in het xy-vlak op een cirkel met straal 3 rond de oorsprong.
   De hoek tussen OP en de positieve x-as is 0,5.

   Bepaal de coördinaten van P.



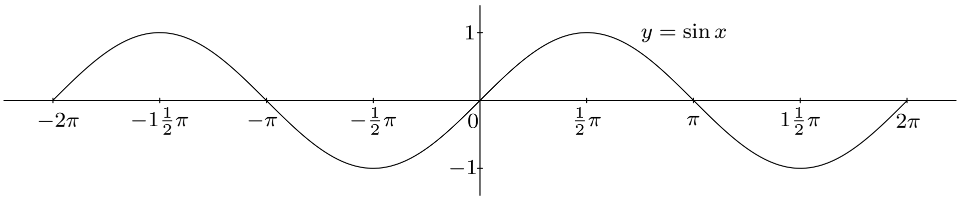
Figuur 10.28



Oplossing:

Zie de figuur ernaast: x_P is de projectie van P op de x-as en y_P is de projectie op de y-as.
Dan is $x_P = 3\cos 0{,}5 \approx 2{,}63$ en $y_P = 3\sin 0{,}5 \approx 1{,}44$, dus $P = (2{,}63, 1{,}44)$.

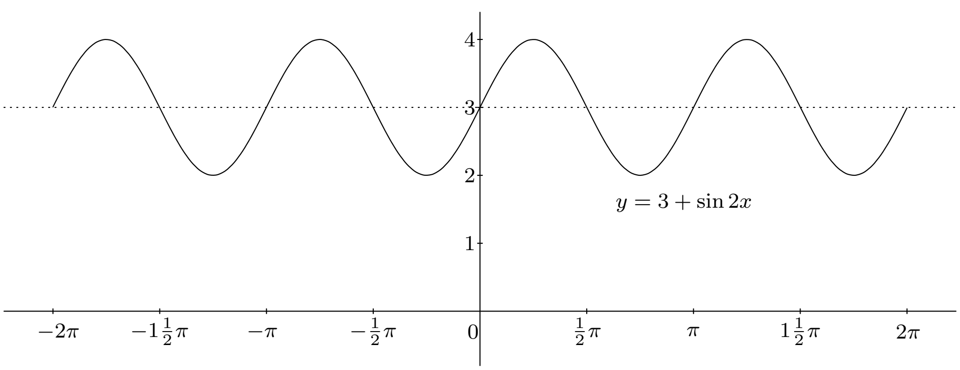
3 a. De grafiek van $y = \sin x$ is een standaardgrafiek, die je zo moet kunnen tekenen:



b. De grafiek van $y = \sin 2x$ ontstaat uit de grafiek van $y = \sin x$ door deze met een factor 2 ten opzichte van de y-as in te drukken.

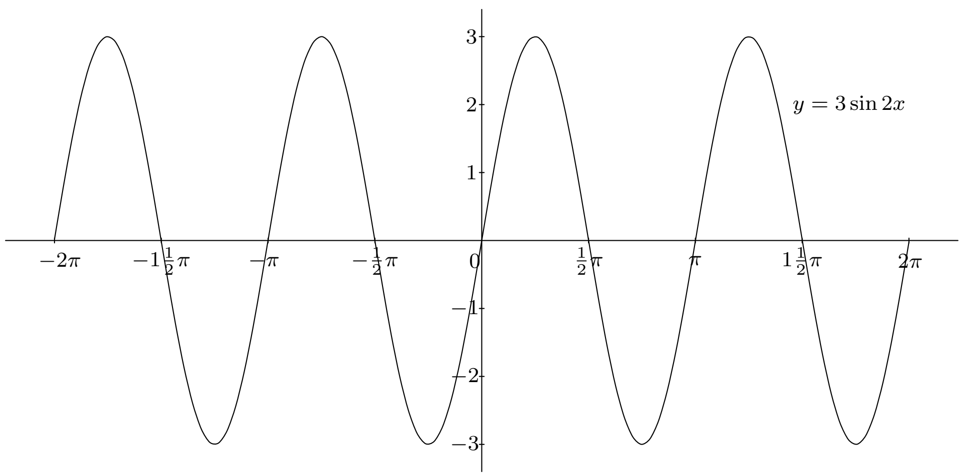
Je zou kunnen zeggen dat '$\sin 2x$ twee keer zo snel loopt als $\sin x$'.

De grafiek van $y = 3 + \sin 2x$ ontstaat uit die van $y = \sin 2x$ door deze over een afstand 3 naar boven te schuiven.



Het resultaat is dus ontstaan door eerst de grafiek van de sinus met een factor 2 ten opzichte van de y-as in te drukken en daarna over een afstand 3 naar boven te schuiven.

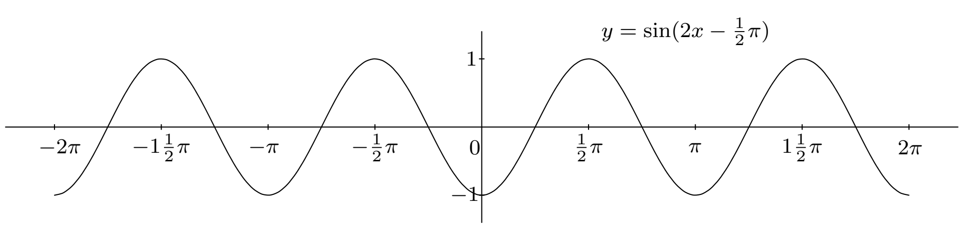
c. De grafiek van $y = 3\sin 2x$ ontstaat uit de grafiek van $y = \sin 2x$ door deze met een factor 3 in de y-richting uit te rekken. Alle y-waarden worden 3 keer zo groot.



Het resultaat is dus ontstaan door eerst de grafiek van de sinus met een factor 2 ten opzichte van de y-as in te drukken en daarna met een factor 3 in de y-richting uit te rekken.

d. Herschrijf de functie: $y = \sin(2x - \frac{1}{2}\pi) = \sin 2(x - \frac{1}{4}\pi)$

De grafiek van $y = \sin 2(x - \frac{1}{4}\pi)$ ontstaat uit die van $\sin 2x$ door deze over een afstand $\frac{1}{4}\pi$ naar rechts te verschuiven.



Het resultaat is dus ontstaan door eerst de grafiek van de sinus met een factor 2 in te drukken en daarna over een afstand $\frac{1}{4}\pi$ naar rechts te verschuiven.

10.6.1

Bij de onderstaande antwoorden laten we de aanduiding (k geheel) of ($k \in \mathbb{Z}$) weg. Waar de letter k wordt gebruikt is steeds een geheel getal, een geheel veelvoud bedoeld. Dus k kan de waarden $0, 1, -1, 2, -2, \cdots$ aannemen.

1. a. $\sin x = 0$ {zie de grafiek van de sinus}

   $\Leftrightarrow \quad x = k\pi$

   Met de standaardmethode krijg je $x = 0 + 2k\pi \ \vee \ x = (\pi - 0) + 2k\pi$ en dat is equivalent met $x = 2k\pi \ \vee \ x = \pi + 2k\pi$. Dit levert dezelfde verzameling oplossingen op als $x = k\pi$.

   b. $\sin x = 1$ {zie de grafiek van de sinus}

   $\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$

   Met de standaardmethode krijg je $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = (\pi - \frac{1}{2}\pi) + 2k\pi$. Omdat $\pi - \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$ levert de tweede term hiervan geen nieuwe oplossingen op.

   c. $\cos x = 0$ {zie de grafiek van de cosinus}

   $\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}\pi + k\pi$

   Met de standaardmethode krijg je $x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi$ en dat is hiermee equivalent.

   d. $\cos x = 0{,}5$ {standaardmethode, gebruik $\cos \frac{1}{3}\pi = 0{,}5$}

   $\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{1}{3}\pi + 2k\pi$

   e. $\tan x = 0$ {standaardmethode, gebruik $\tan 0 = 0$}

   $\Leftrightarrow \quad x = k\pi$

   f. $\tan x = \sqrt{3}$ {standaardmethode, gebruik $\tan \frac{1}{3}\pi = \sqrt{3}$}

   $\Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{3}\pi + k\pi$

2. a.

$$\begin{aligned}
& \sin(2x+1)=0 && \{\ \sin x = 0 \text{ heeft } x = k\pi \text{ als oplossing}\}\\
\Leftrightarrow\ & 2x+1=k\pi && \{\text{breng 1 naar rechts}\}\\
\Leftrightarrow\ & 2x=-1+k\pi && \{\text{deel door 2}\}\\
\Leftrightarrow\ & x=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}k\pi
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
& 1+\cos 2x=\tfrac{1}{2} && \{\text{breng 1 naar rechts}\}\\
\Leftrightarrow\ & \cos 2x=-\tfrac{1}{2} && \{\text{gebruik } \cos\tfrac{2}{3}\pi=-\tfrac{1}{2}\}\\
\Leftrightarrow\ & 2x=\tfrac{2}{3}\pi+2k\pi \ \vee\ 2x=-\tfrac{2}{3}\pi+2k\pi && \{\text{deel door 2}\}\\
\Leftrightarrow\ & x=\tfrac{1}{3}\pi+k\pi \ \vee\ x=-\tfrac{1}{3}\pi+k\pi
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
& \cos\tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{2}\sqrt{3} && \{\text{gebruik } \cos\tfrac{1}{6}\pi=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\}\\
\Leftrightarrow\ & \tfrac{1}{2}x=\tfrac{1}{6}\pi+2k\pi \ \vee\ \tfrac{1}{2}x=-\tfrac{1}{6}\pi+2k\pi && \{\text{maal 2}\}\\
\Leftrightarrow\ & x=\tfrac{1}{3}\pi+4k\pi \ \vee\ x=-\tfrac{1}{3}\pi+4k\pi
\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}
& \cos(1-x)=0{,}5 && \{\text{gebruik } \cos\tfrac{1}{3}\pi=0{,}5\}\\
\Leftrightarrow\ & 1-x=\tfrac{1}{3}\pi+2k\pi \ \vee\ 1-x=-\tfrac{1}{3}\pi+2k\pi && \{\text{1 naar rechts}\}\\
\Leftrightarrow\ & -x=-1+\tfrac{1}{3}\pi+2k\pi \ \vee\ -x=-1-\tfrac{1}{3}\pi+2k\pi && \{\text{deel door } -1,\ -2k\pi \text{ of } +2k\pi \text{ maakt niet uit}\}\\
\Leftrightarrow\ & x=1-\tfrac{1}{3}\pi+2k\pi \ \vee\ x=1+\tfrac{1}{3}\pi+2k\pi
\end{aligned}$$

e.

$$\begin{aligned}
& \tan 3x=1 && \{\text{standaardmethode, gebruik } \tan\tfrac{1}{4}\pi=1\}\\
\Leftrightarrow\ & 3x=\tfrac{1}{4}\pi+k\pi && \{\text{deel door 3}\}\\
\Leftrightarrow\ & x=\tfrac{1}{12}\pi+\tfrac{1}{3}k\pi
\end{aligned}$$

f.

$$\begin{aligned}
& 3\tan 3x=\sqrt{3} && \{\text{deel door 3}\}\\
\Leftrightarrow\ & \tan 3x=\tfrac{1}{3}\sqrt{3} && \{\text{standaardmethode, gebruik } \tan\tfrac{1}{6}\pi=\tfrac{1}{3}\sqrt{3}\}\\
\Leftrightarrow\ & 3x=\tfrac{1}{6}\pi+k\pi && \{\text{deel door 3}\}\\
\Leftrightarrow\ & x=\tfrac{1}{18}\pi+\tfrac{1}{3}k\pi
\end{aligned}$$

3. a. $\sin x = 0{,}2$ $\quad\{\boxed{\sin^{-1}}\,0{,}2 = 0{,}201\}$

$\Leftrightarrow \quad x = 0{,}201 + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - 0{,}201 + 2k\pi$

b. $\sin x = 2$

geen enkele x voldoet, want $-1 \leq \sin x \leq 1$

c. $\cos x = -\frac{1}{5}$ $\quad\{\boxed{\cos^{-1}}\,-\frac{1}{5} = 1{,}77\}$

$\Leftrightarrow \quad x = 1{,}77 + 2k\pi \ \vee \ x = -1{,}77 + 2k\pi$

d. $\cos x = -1{,}5$

geen enkele x voldoet, want $-1 \leq \cos x \leq 1$

e. $\tan x = 100$ $\quad\{\boxed{\tan^{-1}}\,100 = 1{,}56\}$

$\Leftrightarrow \quad x = 1{,}56 + k\pi$

f. $\tan x = -0{,}1$ $\quad\{\boxed{\tan^{-1}}\,-0{,}1 = -0{,}10\}$

$\Leftrightarrow \quad x = -0{,}10 + k\pi$

4. a. $\sin x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\quad\{\sin -\frac{1}{4}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\}$

$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{4}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - (-\frac{1}{4}\pi) + 2k\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{4}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$

In de eerste reeks oplossingen ($x = -\frac{1}{4}\pi + 2k\pi$) krijg je alleen voor $k = 0$ en $k = 1$ waarden in het interval $[-2\pi{,}2\pi]$ en wel $x = -\frac{1}{4}\pi$ en $x = 1\frac{3}{4}\pi$.

Voor bijvoorbeeld $k = -1$ krijg je $-2\frac{1}{4}\pi$ en voor $k = 2$ krijg je $3\frac{3}{4}\pi$ en die liggen buiten $[-2\pi{,}2\pi]$.

In de tweede reeks oplossingen ($x = \frac{5}{4}\pi + 2k\pi$) krijg je alleen voor $k = -1$ en $k = 0$ waarden in het interval $[-2\pi{,}2\pi]$ en wel $x = -\frac{3}{4}\pi$ en $x = 1\frac{1}{4}\pi$.

Voor bijvoorbeeld $k = -2$ krijg je $-2\frac{3}{4}\pi$ en voor $k = 1$ krijg je $2\frac{5}{4}\pi$.

Op het interval $[-2\pi{,}2\pi]$ zijn de oplossingen: $x = -\frac{3}{4}\pi \ \vee \ x = -\frac{1}{4}\pi \ \vee \ x = 1\frac{1}{4}\pi \ \vee \ x = 1\frac{3}{4}\pi$

De werkwijze is: kies gehele waarden voor k rond 0 ($k = 0, 1, -1, 2, -2, \cdots$) en bekijk per uitkomst of het resultaat nog in het interval $[-2\pi{,}2\pi]$ ligt.

b. $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ $\{\cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\}$

$\Leftrightarrow\ x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi \ \vee\ x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$

Invullen van $k = 0,\ 1,\ -1$ levert: $x = -1\frac{1}{4}\pi \ \vee\ x = -\frac{3}{4}\pi \ \vee\ x = \frac{3}{4}\pi \ \vee\ x = 1\frac{1}{4}\pi$

c. $\sin x = \frac{1}{2}$ $\{\sin \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\}$

$\Leftrightarrow\ x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi \ \vee\ x = \pi - (\frac{1}{6}\pi) + 2k\pi$

$\Leftrightarrow\ x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi \ \vee\ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$

Invullen van $k = 0$ en $k = -1$ levert: $x = -1\frac{5}{6}\pi \ \vee\ x = -1\frac{1}{6}\pi \ \vee\ x = \frac{1}{6}\pi \ \vee\ x = \frac{5}{6}\pi$

d. $\cos x = \frac{1}{3}$ $\{\boxed{\cos^{-1}}\ \frac{1}{3} = 1{,}23\}$

$\Leftrightarrow\ x = 1{,}23 + 2k\pi \ \vee\ x = -1{,}23 + 2k\pi$

$k = -1 \ \Rightarrow\ x = 1{,}23 - 2\pi \approx 1{,}23 - 6{,}28 = -5{,}05 \ \vee\ x = -1{,}23 - 2\pi$ (vervalt, buiten $[-2\pi, 2\pi]$)
$k = 0 \ \Rightarrow\ x = -1{,}23 \ \vee\ x = 1{,}23$
$k = 1 \ \Rightarrow\ x = 1{,}23 + 2\pi$ (vervalt, buiten $[-2\pi, 2\pi]$) $\vee\ x = -1{,}23 + 2\pi \approx -1{,}23 + 6{,}26 = 5{,}05$

De oplossing is: $x = -5{,}05 \ \vee\ x = -1{,}23 \ \vee\ x = 1{,}23 \ \vee\ x = 5{,}05$

e. $\tan x = 1$ $\{\tan \frac{1}{4}\pi = 1\}$

$\Leftrightarrow\ x = \frac{1}{4}\pi + k\pi$

$k = -2 \ \Rightarrow\ x = -1\frac{3}{4}\pi$
$k = -1 \ \Rightarrow\ x = -\frac{3}{4}\pi$
$k = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{4}\pi$
$k = 1 \ \Rightarrow\ x = 1\frac{1}{4}\pi$

De oplossing is: $x = -1\frac{3}{4}\pi \ \vee\ x = -\frac{3}{4}\pi \ \vee\ x = \frac{1}{4}\pi \ \vee\ x = 1\frac{1}{4}\pi$

f. $\tan x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$ $\{\tan \frac{1}{6}\pi = \frac{1}{3}\sqrt{3}\}$

$\Leftrightarrow\ x = \frac{1}{6}\pi + k\pi$

$k = -2 \ \Rightarrow\ x = -1\frac{5}{6}\pi$
$k = -1 \ \Rightarrow\ x = -\frac{5}{6}\pi$
$k = 0 \ \Rightarrow\ x = \frac{1}{6}\pi$
$k = 1 \ \Rightarrow\ x = 1\frac{1}{6}\pi$

De oplossing is: $x = -1\frac{5}{6}\pi \ \vee\ x = -\frac{5}{6}\pi \ \vee\ x = \frac{1}{6}\pi \ \vee\ x = 1\frac{1}{6}\pi$

5. a.

$$\begin{aligned} & \sin x = \sin \tfrac{3}{8}\pi \\ \Leftrightarrow\quad & x = \tfrac{3}{8}\pi + 2k\pi \ \vee\ x = \pi - \tfrac{3}{8}\pi + 2k\pi \\ \Leftrightarrow\quad & x = \tfrac{3}{8}\pi + 2k\pi \ \vee\ x = \tfrac{5}{8}\pi + 2k\pi \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} & \cos x = \cos \tfrac{1}{9}\pi \\ \Leftrightarrow\quad & x = \tfrac{1}{9}\pi + 2k\pi \ \vee\ x = -\tfrac{1}{9}\pi + 2k\pi \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} & \sin x = \sin(4x+1) \\ \Leftrightarrow\quad & x = 4x + 1 + 2k\pi \ \vee\ x = \pi - (4x+1) + 2k\pi \\ \Leftrightarrow\quad & -3x = 1 + 2k\pi \ \vee\ 5x = \pi - 1 + 2k\pi \\ \Leftrightarrow\quad & x = -\tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}k\pi \ \vee\ x = -\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{5}\pi + \tfrac{2}{5}k\pi \end{aligned}$$

(Merk op dat je voor $-k\pi$ ook $+k\pi$ mag schrijven, k doorloopt de gehele getallen)

d.

$$\begin{aligned} & \cos(2x-1) = \cos(1-2x) \\ \Leftrightarrow\quad & 2x - 1 = 1 - 2x + 2k\pi \ \vee\ 2x - 1 = -(1-2x) + 2k\pi \\ \Leftrightarrow\quad & 2x - 1 = 1 - 2x + 2k\pi \ \vee\ 2x - 1 = -1 + 2x + 2k\pi \\ \Leftrightarrow\quad & 4x = 2 + 2k\pi \ \vee\ 0 = 0 + 2k\pi \end{aligned}$$

De tweede term is juist voor $k = 0$, ongeacht de waarde van x:
elke waarde van x voldoet aan deze vergelijking.

(Inderdaad geldt $\cos(2x-1) = \cos(-1+2x) = \cos[-(1-2x)] = \cos(1-2x)$,
want $\cos w = \cos(-w)$)

Conclusie: elke $x \in \mathbb{R}$ voldoet.

e.

$$\begin{aligned} & \tan x = \tan \tfrac{1}{10}\pi \\ \Leftrightarrow\quad & x = \tfrac{1}{10}\pi + k\pi \end{aligned}$$

f.

$$\begin{aligned} & \tan 2x = \tan x \\ \Leftrightarrow\quad & 2x = x + k\pi \\ \Leftrightarrow\quad & x = k\pi \end{aligned}$$

6. a.

$$
\begin{array}{lll}
 & \sin x = -\sin\frac{3}{8}\pi & \{\text{gebruik } \sin(-w) = -\sin w\} \\
\Leftrightarrow & \sin x = \sin(-\frac{3}{8}\pi) & \\
\Leftrightarrow & x = -\frac{3}{8}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = \pi - (-\frac{3}{8}\pi) + 2k\pi & \\
\Leftrightarrow & x = -\frac{3}{8}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = 1\frac{3}{8}\pi + 2k\pi &
\end{array}
$$

b.

$$
\begin{array}{lll}
 & \cos x = -\cos\frac{1}{9}\pi & \{\text{gebruik } \cos(w+\pi) = -\cos w\} \\
\Leftrightarrow & \cos x = \cos(1\frac{1}{9}\pi) & \\
\Leftrightarrow & x = 1\frac{1}{9}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = -1\frac{1}{9}\pi + 2k\pi &
\end{array}
$$

c.

$$
\begin{array}{lll}
 & \sin^2 x = \frac{1}{4} & \{\text{standaardvergelijking } z^2 = A\} \\
\Leftrightarrow & \sin x = \frac{1}{2} \ \vee \ \sin x = -\frac{1}{2} & \{\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2} \text{ en } \sin(-\frac{1}{6}\pi) = -\frac{1}{2}\} \\
\Leftrightarrow & x = \frac{1}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{1}{6}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = 1\frac{1}{6}\pi + 2k\pi & \\
\Leftrightarrow & x = \frac{1}{6}\pi + k\pi \ \vee \ x = -\frac{1}{6}\pi + k\pi &
\end{array}
$$

d.

$$
\begin{array}{lll}
 & \cos^2 x = \cos x & \{\text{herleid op } 0\} \\
\Leftrightarrow & \cos^2 x - \cos x = 0 & \{\text{ontbind in factoren}\} \\
\Leftrightarrow & \cos x(\cos x - 1) = 0 & \{\text{product is } 0\} \\
\Leftrightarrow & \cos x = 0 \ \vee \ \cos x = 1 & \{\text{zie de grafiek van de cosinus}\} \\
\Leftrightarrow & x = \frac{1}{2}\pi + k\pi \ \vee \ x = 2k\pi &
\end{array}
$$

e.

$$
\begin{array}{lll}
 & \sin x = \cos 2x & \{\text{gebruik } \sin w = \cos(w - \frac{1}{2}\pi)\} \\
\Leftrightarrow & \cos(x - \frac{1}{2}\pi) = \cos 2x & \\
\Leftrightarrow & x - \frac{1}{2}\pi = 2x + 2k\pi \ \vee \ x - \frac{1}{2}\pi = -2x + 2k\pi & \\
\Leftrightarrow & -x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi \ \vee \ 3x = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi & \\
\Leftrightarrow & x = -\frac{1}{2}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{1}{6}\pi + \frac{2}{3}k\pi &
\end{array}
$$

f.

$$
\begin{array}{lll}
 & 2\cos^2 x = 1 - \cos x & \{\text{substitutie } \cos x = y\} \\
\Leftrightarrow & 2y^2 = 1 - y & \{\text{herleid op } 0\} \\
\Leftrightarrow & 2y^2 + y - 1 = 0 & \{\text{los op met de abc-formule, discriminant is } 9\} \\
\Leftrightarrow & y_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 3}{4} & \\
\Leftrightarrow & y = -1 \ \vee \ y = \frac{1}{2} & \{y = \cos x\} \\
\Leftrightarrow & \cos x = -1 \ \vee \ \cos x = \frac{1}{2} & \{\cos\pi = -1 \text{ en } \cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}\} \\
\Leftrightarrow & x = \pi + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{1}{3}\pi + 2k\pi \ \vee \ x = -\frac{1}{3}\pi + 2k\pi &
\end{array}
$$

10.7.1

1. a.
$$\begin{aligned} & \sin(x-y) \\ = \;& \sin(x+(-y)) && \{\text{somregel voor de sinus}\} \\ = \;& \sin x\cos(-y)+\cos x\sin(-y) && \{\cos(-y)=\cos y \text{ en } \sin(-y)=-\sin y\} \\ = \;& \sin x\cos y+\cos x\cdot -\sin y \\ = \;& \sin x\cos y-\cos x\sin y \end{aligned}$$

   b.
$$\begin{aligned} & \cos(x-y) \\ = \;& \cos(x+(-y)) && \{\text{somregel voor de cosinus}\} \\ = \;& \cos x\cos(-y)-\sin x\sin(-y) && \{\cos(-y)=\cos y \text{ en } \sin(-y)=-\sin y\} \\ = \;& \cos x\cos y-\sin x\cdot -\sin y \\ = \;& \cos x\cos y+\sin x\sin y \end{aligned}$$

   c.
$$\begin{aligned} & \tan(x-y) \\ = \;& \tan(x+(-y)) && \{\text{somregel voor de tangens}\} \\ = \;& \frac{\tan x+\tan(-y)}{1-\tan x\cdot\tan(-y)} && \{\tan(-y)=-\tan y\} \\ = \;& \frac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y} \end{aligned}$$

2. a. $\sin(x+\pi)=\sin x\cos\pi+\cos x\sin\pi=\sin x\cdot -1+\cos x\cdot 0=-\sin x$
   b. $\sin(x-\pi)=\sin x\cos(-\pi)+\cos x\sin(-\pi)=\sin x\cdot -1+\cos x\cdot 0=-\sin x$
   c. $\cos(x+\pi)=\cos x\cos\pi-\sin x\sin\pi=\cos x\cdot -1-\sin x\cdot 0=-\cos x$
   d. $\cos(x-\pi)=\cos x\cos(-\pi)-\sin x\sin(-\pi)=\cos x\cdot -1-\sin x\cdot 0=-\cos x$

   Deze formules drukken uit dat verschuiven van de grafieken van de sinus en de cosinus over π naar links of naar rechts een spiegeling in de x-as van deze grafieken geeft.

   Dat de antwoorden van de onderdelen a. en b. en van de onderdelen c. en d. onderling gelijk zijn, komt omdat de argumenten (dat zijn de waarden waarvoor je de functie berekent) precies 2π verschillen. Zo had je voor de afleiding van onderdeel *b.* ook kunnen kiezen voor:

   $$\sin(x-\pi)=\sin((x+\pi)-2\pi)=\sin(x+\pi)=-\sin x$$

3. a. $\sin(x + \frac{1}{2}\pi) = \sin x \cos \frac{1}{2}\pi + \cos x \sin \frac{1}{2}\pi = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x$

   b. $\sin(x - \frac{1}{2}\pi) = \sin x \cos(-\frac{1}{2}\pi) + \cos x \sin(-\frac{1}{2}\pi) = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot -1 = -\cos x$

   c. $\cos(x + \frac{1}{2}\pi) = \cos x \cos \frac{1}{2}\pi - \sin x \sin \frac{1}{2}\pi = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$

   d. $\cos(x - \frac{1}{2}\pi) = \cos x \cos(-\frac{1}{2}\pi) - \sin x \sin(-\frac{1}{2}\pi) = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot -1 = \sin x$

4. $$\tan(x + \tfrac{1}{4}\pi) = \frac{\tan x + \tan \frac{1}{4}\pi}{1 - \tan x \tan \frac{1}{4}\pi} = \frac{\tan x + 1}{1 - \tan x \cdot 1} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$$
$$= \frac{1 + \dfrac{\sin x}{\cos x}}{1 - \dfrac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

5. Gegeven: $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ Te bewijzen: $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

   Bewijs:

$$\begin{aligned}
& \tan 2x && \{\text{gebruik } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\} \\
= \;& \frac{\sin 2x}{\cos 2x} && \{\text{verdubbelingsformules van sinus en cosinus}\} \\
= \;& \frac{2\sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} && \{\text{deel teller en noemer door } \cos^2 x\} \\
= \;& \frac{2\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1 - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} && \{\text{gebruik } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}\} \\
= \;& \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}
\end{aligned}$$

6. a. $1 + \tan^2 x = 1 + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

   b. $$\begin{aligned}\sqrt{2}\sin(x - \tfrac{1}{4}\pi) &= \sqrt{2}\left[\sin x \cos(-\tfrac{1}{4}\pi) + \cos x \sin(-\tfrac{1}{4}\pi)\right] \\ &= \sqrt{2}\left[\sin x \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} + \cos x \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right] \\ &= \sin x - \cos x\end{aligned}$$

   c. $$\begin{aligned}\sqrt{2}\cos(x - \tfrac{1}{4}\pi) &= \sqrt{2}\left[\cos x \cos(-\tfrac{1}{4}\pi) - \sin x \sin(-\tfrac{1}{4}\pi)\right] \\ &= \sqrt{2}\left[\cos x \cdot \tfrac{1}{2}\sqrt{2} - \sin x \cdot -\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right] \\ &= \sin x + \cos x\end{aligned}$$

   d. Delen van de linkerzijde en rechterzijde van onderdeel b. door die van onderdeel c. geeft het resultaat.