Wiskunde voor bachelor en master

Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden

Uitwerkingen hoofdstuk 12

12.1.1

1. We bepalen de afgeleide van $f(x) = 5x$ met de definitie van $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \{\text{neem } f(x) = 5x\} \\
= \; & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5(x+\Delta x) - 5x}{\Delta x} && \{\text{haakjes uitwerken}\} \\
= \; & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5x + 5\Delta x - 5x}{\Delta x} && \{\text{vereenvoudig}\} \\
= \; & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{5\Delta x}{\Delta x} && \{\text{deel teller en noemer door } \Delta x \text{, dat mag want } \Delta x \neq 0\} \\
= \; & \lim_{\Delta x \to 0} 5 \; = \; 5
\end{aligned}$$

Dus $f(x) = 5x \;\Rightarrow\; f'(x) = 5$.

Dit klopt met het feit dat de grafiek van f een rechte lijn is met helling 5.

Een toename in de x-richting geeft een vijf maal zo grote toename in de y-richting.

2. Voor de constante functie $f(x) = 3$ geldt:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \{\text{neem } f(x) = 3\} \\
= \; & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3 - 3}{\Delta x} \\
= \; & \lim_{\Delta x \to 0} 0 \\
= \; & \quad 0
\end{aligned}$$

De verandersnelheid is overal 0: de functie verandert niet.

3. Bepalen van de afgeleide van $g(x) = 2x^2 - x$ met de definitie van $g'(x)$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} && \{\text{neem } g(x) = 2x^2 - x\} \\
= & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[2(x+\Delta x)^2 - (x+\Delta x)] \; - \; [2x^2 - x]}{\Delta x} && \{\text{haakjes uitwerken}\} \\
= & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - x - \Delta x - 2x^2 + x}{\Delta x} && \{\text{vereenvoudig}\} \\
= & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - \Delta x}{\Delta x} \\
= & \lim_{\Delta x \to 0} (4x - 1 + 2\Delta x) \\
= & \quad 4x - 1
\end{aligned}$$

Dus $g(x) = 2x^2 - x \;\Rightarrow\; g'(x) = 4x - 1$

4. Bepalen van de afgeleide van $f(x) = x^3$:

$$\begin{aligned}
& \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \{\text{neem } f(x) = x^3\} \\
= & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^3 \; - \; x^3}{\Delta x} && \{\text{haakjes uitwerken}\} \\
= & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - x^3}{\Delta x} && \{\text{vereenvoudig}\} \\
= & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} \\
= & \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2 \\
= & \quad 3x^2
\end{aligned}$$

Dus $f(x) = x^3 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3x^2$

5. Als $P(t)$ de populatiegrootte van een bacteriekolonie op tijdstip t is, dan is $P'(t)$ de snelheid waarmee deze populatie op tijdstip t toeneemt.

   De eenheid van $P(t)$ is het aantal bacteriën (dus gewoon een aantal, dimensieloos), de eenheid van $P'(t)$ is aantal (bacteriën) per seconde $[1/s]$.

6. De afgelegde weg s van een voorwerp op tijdstip t (in seconden) is gelijk aan $3t^2$ meter.

   De snelheid is $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, de afgeleide van de afgelegde weg.

   De versnelling is $a = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$, de afgeleide van de snelheid.

   In het boek, paragraaf 12.1, is als voorbeeld de afgeleide van de functie $f(x) = 3x^2 - 1$ bepaald, met als resultaat $f'(x) = 6x$. De constante -1 speelt daarbij geen rol en precies als in het voorbeeld volgt dat de afgeleide van $3t^2$ gelijk is aan $6t$. De afgeleide van $6t$ is op zijn beurt gelijk aan 6 (vergelijk opgave 1).

   We hebben dus:

$$s = 3t^2\,\mathrm{m},\;\; v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 6t\,\mathrm{m/s}\text{ en }\; a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6\,\mathrm{m/s}^2$$

   Op tijdstip $t = 4$ geldt dan:

$$s = 3\cdot 4^2 = 48\,\mathrm{m},\;\; v = 6\cdot 4 = 24\,\mathrm{m/s}\text{ en }\; a = 6\,\mathrm{m/s}^2$$

12.2.1

1. De afgeleide van $f(x) = x^2$ is $f'(x) = 2x$.

   De raaklijn in het punt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ van de grafiek heeft helling $f'(\frac{1}{2}) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$.
   De vergelijking van deze raaklijn is van de vorm $y = x + b$.
   Invullen van het punt $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ hierin geeft $\frac{1}{4} = \frac{1}{2} + b$, dus $b = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$.

   Conclusie: de raaklijn in $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ wordt gegeven door $y = x - \frac{1}{4}$.

   Voor de raaklijn in (0,0) aan de grafiek vind je als helling $f'(0) = 0$.
   De vergelijking van deze raaklijn is dan van de vorm $y = b$.
   Het punt (0,0) invullen levert $b = 0$, dus de vergelijking is $y = 0$.

   Conclusie: de raaklijn in (0,0) wordt gegeven door $y = 0$ (dat is dus de x-as).

2. Bepalen van de afgeleide van $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

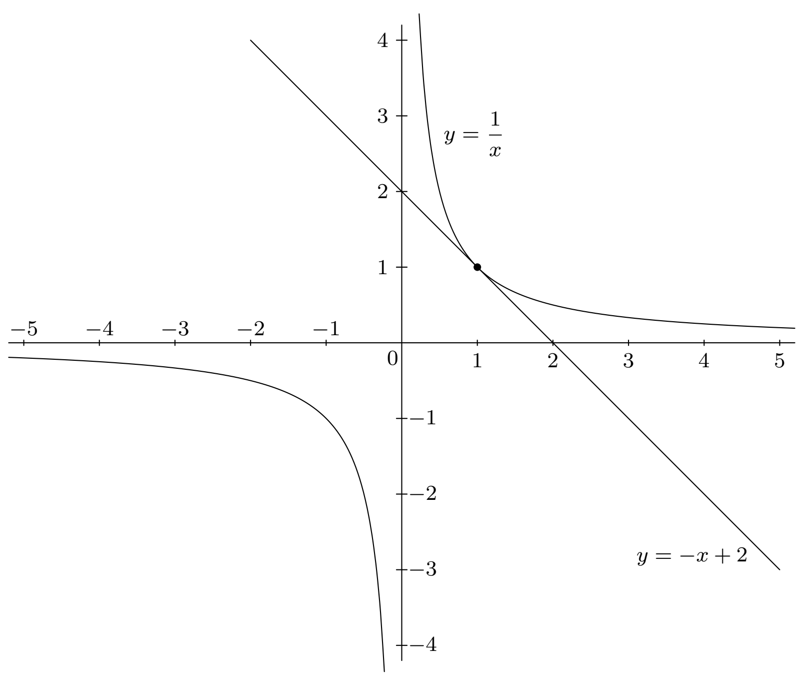
$$
\begin{aligned}
& \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} && \{\text{neem } f(x) = \tfrac{1}{x}\} \\
= \; & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{1}{x+\Delta x} - \dfrac{1}{x}}{\Delta x} && \{\text{gelijknamig maken}\} \\
= \; & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{x}{x(x+\Delta x)} - \dfrac{x+\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} && \{\text{uitwerken}\} \\
= \; & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{-\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} && \{\text{deel teller en noemer door } \Delta x\} \\
= \; & \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x+\Delta x)} && \{\text{neem de limiet}\} \\
= \; & \frac{-1}{x\cdot x} = \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}
\end{aligned}
$$

   Dus $f(x) = \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

De raaklijn aan de grafiek in (1,1) aan $y = \frac{1}{x}$ heeft helling $f'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.
De vergelijking van de raaklijn is dus van de vorm $y = -x + b$.
Invullen van het punt (1,1) hierin geeft $1 = -1 + b$, dus $b = 2$

De raaklijn wordt gegeven door $y = -x + 2$.

In de onderstaande figuur is de grafiek van $y = \frac{1}{x}$ getekend met de raaklijn in (1,1) aan de grafiek.



12.3.1

1. a. $f(x) = x^7 \;\Rightarrow\; f'(x) = 7x^6$

   b. $g(x) = x \;\Rightarrow\; g'(x) = 1 \cdot x^0 = 1$

   c. $f(x) = 4 \;\Rightarrow\; f'(x) = 0$

   d. $h(x) = \dfrac{1}{x^5} = x^{-5} \;\Rightarrow\; h'(x) = -5x^{-6} = -\dfrac{5}{x^6}$

   e. $g(t) = \dfrac{1}{t^3} = t^{-3} \;\Rightarrow\; g'(t) = -3t^{-4} = -\dfrac{3}{t^4}$

   f. $f(t) = t^{10} \;\Rightarrow\; f'(t) = 10t^9$

2. a. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; f'(x) = -\tfrac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

   b. $g(x) = x\sqrt[3]{x} = x^{1\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; g'(x) = 1\tfrac{1}{3}x^{\frac{1}{3}} = 1\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{x}$

   c. $v(x) = x\sqrt[3]{x^2} = x^{1\frac{2}{3}} \;\Rightarrow\; v'(x) = 1\tfrac{2}{3}x^{\frac{2}{3}} = 1\tfrac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}$

   d. $u(t) = t\sqrt[4]{t} = t^{1\frac{1}{4}} \;\Rightarrow\; u'(t) = 1\tfrac{1}{4}t^{\frac{1}{4}} = 1\tfrac{1}{4}\sqrt[4]{t}$

   e. $f(r) = r^2\sqrt{r} = r^{2\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; f'(r) = 2\tfrac{1}{2}r^{1\frac{1}{2}} = 2\tfrac{1}{2}r\sqrt{r}$

   f. $h(x) = \dfrac{1}{x^3\sqrt{x}} = x^{-3\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; h'(x) = -3\tfrac{1}{2}x^{-4\frac{1}{2}} = -3\tfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x^4\sqrt{x}} = -\dfrac{7}{2x^4\sqrt{x}}$

3. a. $s = t^2 \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2t$

   b. $s = 20 \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 0$

   c. $s = t\sqrt[4]{t^3} = t^{1\frac{3}{4}} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 1\tfrac{3}{4}t^{\frac{3}{4}} = 1\tfrac{3}{4}\sqrt[4]{t^3}$

   d. $s = \dfrac{1}{t} = t^{-1} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -t^{-2} = -\dfrac{1}{t^2}$

   e. $s = t \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 1$

   f. $s = \dfrac{1}{t\sqrt{t}} = t^{-1\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -1\tfrac{1}{2}t^{-2\frac{1}{2}} = -1\tfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{t^2\sqrt{t}} = -\dfrac{3}{2t^2\sqrt{t}}$

12.5.1

1. a. $y = 3t^3 + 4t^2 - t\cos t \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 9t^2 + 8t - \cos t + t\sin t$

   b. $y = t^2\sin t \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t\sin t + t^2\cos t$

   c. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2}x^{-1\frac{1}{2}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}$

   d. $y = 2x^2\cos x \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x\cos x - 2x^2\sin x$

   e. $y = \dfrac{1}{\tan x} = \dfrac{\cos x}{\sin x} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{-\sin x\cdot\sin x - \cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

   of zo:

   $$y = \frac{1}{\tan x} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{0\cdot\tan x - 1\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}}{\tan^2 x} = -\frac{1}{\cos^2 x\cdot\tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

   f. $y = \sin^2 x = \sin x\cdot\sin x \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos x\cdot\sin x + \sin x\cdot\cos x = 2\sin x\cos x = \sin 2x$

2. a. $y = \dfrac{(x^2+1)(x-1)}{x} = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x} = x^2 - x + 1 - \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2x - 1 + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2}$

   (je krijgt dit resultaat ook met de quotiëntregel, maar dat is veel bewerkelijker)

   b. $y = \dfrac{1}{x(1+\sqrt{x})} = \dfrac{1}{x + x\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{1 + 1\frac{1}{2}\sqrt{x}}{x^2(1+\sqrt{x})^2} = -\dfrac{2 + 3\sqrt{x}}{2x^2(1+\sqrt{x})^2}$

   (de regel $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$ is hierbij gebruikt)

2. c. $y = \dfrac{x\cos x}{1+\sin x} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{(\cos x - x\sin x)\cdot(1+\sin x) \;-\; x\cos x\cdot\cos x}{(1+\sin x)^2}$

$$= \frac{\cos x + \sin x\cos x - x\sin x - x\sin^2 x - x\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \sin x\cos x - x\sin x - x(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \sin x\cos x - x\sin x - x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x(1+\sin x) - x(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x - x)(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - x}{1+\sin x}$$

d. $y = \dfrac{\tan x}{\sin x} = \dfrac{\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)}{\sin x} = \dfrac{1}{\cos x} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \;\; (= \dfrac{\tan x}{\cos x})$

of met de quotiëntregel: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\sin x \;-\; \tan x\cdot\cos x}{\sin^2 x} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\sin x - \sin x}{\sin^2 x}$

$$= \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 1}{\sin x} = \frac{1-\cos^2 x}{\sin x\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x}{\sin x\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

e. $y = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$

f. $y = \dfrac{1}{\cos x} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x} = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

3. a. $y = \dfrac{x^2-1}{x} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{2x\cdot x - (x^2-1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \dfrac{x^2+1}{x^2} = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

b. $y = \dfrac{x^2-1}{x} = x - \dfrac{1}{x} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 1 - (-\dfrac{1}{x^2}) = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

4. a. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2x\cdot x - (x^2+1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

b. De noemer x^2 van de afgeleide is positief op $\langle 0, \infty \rangle$.

De teller $x^2 - 1$ is negatief voor $x^2 < 1$ en positief voor $x^2 > 1$.

Op $\langle 0, \infty \rangle$: negatief voor $0 < x < 1$ en positief voor $x > 1$.

Dus op $\langle 0, \infty \rangle$ geldt:

$f'(x) > 0$ (f stijgend) als $x > 1$ en $f'(x) < 0$ (f dalend) als $0 < x < 1$.

c. De grafiek van f (op $\langle 0, \infty \rangle$) staat in de onderstaande figuur.

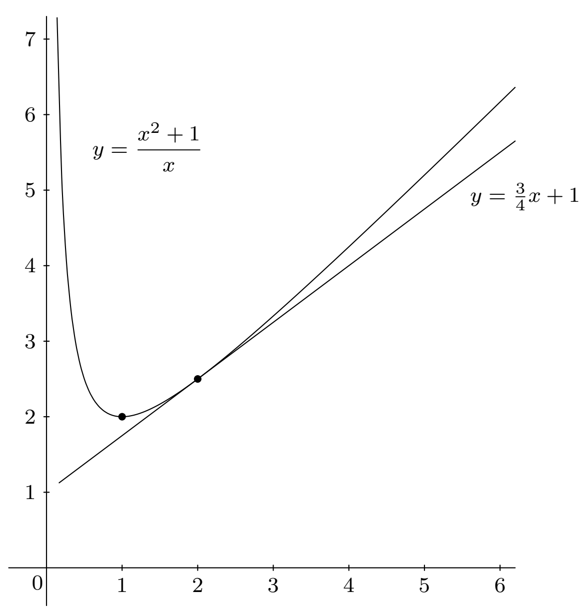
De functie is dalend op $\langle 0{,}1 \rangle$ en stijgend op $\langle 1, \infty \rangle$ en het minimum is $f(1) = \dfrac{1^2+1}{1^2} = 2$.

d. De helling van de raaklijn in $(2{,}2\frac{1}{2})$ is $f'(2) = \dfrac{2^2-1}{2^2} = \frac{3}{4}$.

De vergelijking van de raaklijn heeft dus de vorm $y = \frac{3}{4}x + b$. Invullen van $(2{,}2\frac{1}{2})$:

$2\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\cdot 2 + b$, dus $b = 1$

De vergelijking van de raaklijn is $y = \frac{3}{4}x + 1$.



5. a. $s = t^2 \cos t \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 2t\cos t - t^2 \sin t$

b. $s = 2\tan t \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{2}{\cos^2 t}$

c. $s = \sqrt{t}\cdot\sin t \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\sin t + \sqrt{t}\cos t = \dfrac{\sin t + 2t\cos t}{2\sqrt{t}}$

d. $s = \dfrac{1}{t\cos t} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\cos t - t\sin t}{t^2\cos^2 t} = \dfrac{t\sin t - \cos t}{t^2 \cos^2 t}$

e. $s = t - \sin t \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 1 - \cos t$

f. $s = \dfrac{\cos t}{t\sqrt{t}} = \dfrac{\cos t}{t^{1\frac{1}{2}}} = t^{-1\frac{1}{2}}\cos t \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -1\tfrac{1}{2}t^{-2\frac{1}{2}}\cdot\cos t + t^{-1\frac{1}{2}}\cdot -\sin t$

$$= -\frac{3\cos t}{2t^2\sqrt{t}} - \frac{\sin t}{t\sqrt{t}}$$

$$= -\frac{3\cos t + 2t\sin t}{2t^2\sqrt{t}}$$

$$= -\frac{3\sqrt{t}\cos t + 2t\sqrt{t}\sin t}{2t^3}$$

of met de quotiëntregel:

$$s = \frac{\cos t}{t\sqrt{t}} = \frac{\cos t}{t^{1\frac{1}{2}}} \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{-\sin t\cdot t^{1\frac{1}{2}} - \cos t\cdot 1\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}}{t^3}$$

$$= \frac{-2t^{1\frac{1}{2}}\sin t - 3t^{\frac{1}{2}}\cos t}{2t^3}$$

$$= -\frac{2t\sqrt{t}\sin t + 3\sqrt{t}\cos t}{2t^3}$$

12.6.1

1. a. $y = (x^3+1)^5 \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 5(x^3+1)^4 \cdot (\text{de afgeleide van } x^3+1)$

$$= 5(x^3+1)^4 \cdot 3x^2$$
$$= 15x^2(x^3+1)^4$$

b. $y = \sqrt{x^2+1} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (\text{de afgeleide van } x^2+1)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$$
$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

c. $y = \dfrac{1}{(x^2+1)^4} = (x^2+1)^{-4} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -4(x^2+1)^{-5} \cdot (\text{de afgeleide van } x^2+1)$

$$= -4(x^2+1)^{-5} \cdot 2x$$
$$= -\frac{8x}{(x^2+1)^5}$$

d. $y = (x^2-1)^3 \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3(x^2-1)^2 \cdot (\text{de afgeleide van } x^2-1)$

$$= 3(x^2-1)^2 \cdot 2x$$
$$= 6x(x^2-1)^2$$

e. $y = \sqrt{1+x^3} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x^3}} \cdot (\text{de afgeleide van } 1+x^3)$

$$= \frac{1}{2\sqrt{1+x^3}} \cdot 3x^2$$
$$= \frac{3x^2}{2\sqrt{1+x^3}}$$

f. $y = \dfrac{t\sqrt{t}}{t-1} = \dfrac{t^{1\frac{1}{2}}}{t-1} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}} \cdot (t-1) - t^{1\frac{1}{2}} \cdot 1}{(t-1)^2}$

$$= \frac{1\frac{1}{2}t^{1\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}} - t^{1\frac{1}{2}}}{(t-1)^2} = \frac{\frac{1}{2}t^{1\frac{1}{2}} - 1\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}}}{(t-1)^2}$$
$$= \frac{t^{1\frac{1}{2}} - 3t^{\frac{1}{2}}}{2(t-1)^2} = \frac{t\sqrt{t} - 3\sqrt{t}}{2(t-1)^2} = \frac{(t-3)\sqrt{t}}{2(t-1)^2}$$

Deze laatste opgave ging met de quotiëntregel (niet met de kettingregel)

2. a. $y = \sin\sqrt{x} \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos\sqrt{x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$

   b. $K = \dfrac{q^2+1}{q-1} \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}q} = \dfrac{2q\cdot(q-1)-(q^2+1)\cdot 1}{(q-1)^2} = \dfrac{2q^2-2q-q^2-1}{(q-1)^2} = \dfrac{q^2-2q-1}{(q-1)^2}$

   c. $V = \dfrac{\sin 2t}{t} \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \dfrac{(\cos 2t\cdot 2)\cdot t - \sin 2t\cdot 1}{t^2} = \dfrac{2t\cos 2t - \sin 2t}{t^2}$

   d. $$\begin{aligned} y = 1+\sin^2(2t) \;\;\Rightarrow\;\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= 2\sin(2t)\cdot(\text{de afgeleide van } \sin 2t) \\ &= 2\sin 2t\cdot\cos 2t\cdot(\text{de afgeleide van 2t}) \\ &= 4\sin 2t\cos 2t \\ &= 2\sin 4t \end{aligned}$$

   e. $s = \frac{1}{2}at^2 + (t^2-1)^4 \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = at + 4(t^2-1)^3\cdot 2t = at + 8t(t^2-1)^3$

   f. $$\begin{aligned} y = \frac{1-\sin 2t}{1+t^2} \;\;\Rightarrow\;\; \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= \frac{(-\cos 2t\cdot 2)(1+t^2)-(1-\sin 2t)\cdot 2t}{(1+t^2)^2} \\ &= \frac{-2\cos 2t - 2t^2\cos 2t - 2t + 2t\sin 2t}{(1+t^2)^2} \end{aligned}$$

3. a. $V = 3t^3 + 4t^2 + t\cos t \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 9t^2 + 8t + \cos t - t\sin t$

   b. $H = t^2\cos t \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = 2t\cos t - t^2\sin t$

   c. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x}} = (2x)^{-\frac{1}{2}} \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2}(2x)^{-1\frac{1}{2}}\cdot 2 = -\dfrac{1}{(2x)^{1\frac{1}{2}}} = -\dfrac{1}{2x\sqrt{2x}}$

   d. $y = 2x^2\cos 2x^2 \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 4x\cos 2x^2 \;+\; 2x^2\cdot(-\sin 2x^2\cdot 4x) = 4x\cos 2x^2 - 8x^3\sin 2x^2$

   e. $y = \dfrac{1}{\tan(-x)} \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{\frac{1}{\cos^2(-x)}}{\tan^2(-x)}\cdot(\text{de afgeleide van } -x) = \dfrac{\frac{1}{\cos^2(-x)}}{\tan^2(-x)} = \dfrac{1}{\sin^2(-x)}$

   (in de eerste stap van deze berekening is de regel $\left(\dfrac{1}{f}\right)' = -\dfrac{f'}{f^2}$ gebruikt)

   Omdat $\sin(-x) = -\sin(x)$ geldt $\sin^2(-x) = \sin^2 x$ en kun je het antwoord schrijven als $\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

   f. $y = \sin^2 x - \cos^2 x \;\;\Rightarrow\;\; \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2\sin x\cos x - 2\cos x\cdot -\sin x = 4\sin x\cos x = 2\sin 2x$

4. a. $$P = \frac{(t^2-1)(t+1)}{t} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \frac{[2t\cdot(t+1)+(t^2-1)\cdot 1]\cdot t \;-\; (t^2-1)(t+1)\cdot 1}{t^2}$$
$$= \frac{(2t^2+2t+t^2-1)t \;-\; (t^3+t^2-t-1)}{t^2}$$
$$= \frac{2t^3+2t^2+t^3-t-t^3-t^2+t+1}{t^2}$$
$$= \frac{2t^3+t^2+1}{t^2}$$

Het kan ook zo:

$$P = \frac{(t^2-1)(t+1)}{t} = \frac{t^3+t^2-t-1}{t} = t^2+t-1-\frac{1}{t} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = 2t+1+\frac{1}{t^2} = \frac{2t^3+t^2+1}{t^2}$$

b. $$Q = (1+\sin^2 t)^3 \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = 3(1+\sin^2 t)^2\cdot 2\sin t\cdot\cos t$$
$$= 6\sin t\cos t\cdot(1+\sin^2 t)^2$$
$$= 3\sin 2t\cdot(1+\sin^2 t)^2$$
$$= 3(1+\sin^2 t)^2\sin 2t$$

c. $$y = \frac{x\sin x}{1+\cos x} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(\sin x + x\cos x)\cdot(1+\cos x) \;-\; x\sin x\cdot -\sin x}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{\sin x+\sin x\cos x+x\cos x+x\cos^2 x+x\sin^2 x}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{\sin x+\sin x\cos x+x\cos x+x(\cos^2 x+\sin^2 x)}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{\sin x+\sin x\cos x+x\cos x+x}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{\sin x(1+\cos x)+x(\cos x+1)}{(1+\cos x)^2}$$
$$= \frac{x+\sin x}{1+\cos x}$$

d. $y = \dfrac{\tan x}{\cos x} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 x}\cdot\cos x \;-\; \tan x\cdot -\sin x}{\cos^2 x}$

$$= \frac{\dfrac{1}{\cos x} + \dfrac{\sin x}{\cos x}\cdot\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1+\sin^2 x}{\cos^3 x}$$

e. $E = (2t - \sqrt{4t})^3 \;=\; (2t - 2\sqrt{t})^3 \;=\; 2^3(t-\sqrt{t})^3 \;=\; 8(t-\sqrt{t})^3$

Dus $\dfrac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = 8\cdot 3(t-\sqrt{t})^2\cdot(1 - \dfrac{1}{2\sqrt{t}})$

$$= 24(\sqrt{t})^2(\sqrt{t}-1)^2\cdot(1-\frac{1}{2\sqrt{t}})$$

$$= 24\sqrt{t}(\sqrt{t}-1)^2\cdot(\sqrt{t}-\tfrac{1}{2})$$

f. $y = \dfrac{1}{\cos 2x} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{-\sin 2x\cdot 2}{\cos^2 2x} = \dfrac{2\sin 2x}{\cos^2 2x}$

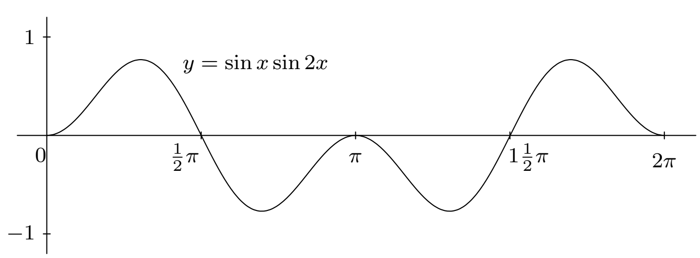
5. Deze opgave heeft betrekking op de functie $f(x) = \sin x \sin 2x$ op het domein $[0{,}2\pi]$.
De grafiek van deze functie is gegeven en staat onder aan de pagina.

a. $f(x) = \sin x\sin 2x \quad\Rightarrow\quad f'(x) = \cos x\cdot\sin 2x + \sin x\cdot 2\cos 2x$

$$= \cos x\cdot 2\sin x\cos x + \sin x\cdot 2(2\cos^2 x - 1)$$

$$= 2\sin x(\cos^2 x + 2\cos^2 x - 1)$$

$$= 2\sin x(3\cos^2 x - 1)$$



b.
$$\begin{aligned} & f'(x) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2\sin x(3\cos^2 x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \sin x = 0 \ \vee\ 3\cos^2 x - 1 = 0 \end{aligned}$$

De vergelijking $\sin x = 0$ heeft als oplossing $x = k\pi$ met $k \in \mathbb{Z}$. Op het interval $[0{,}2\pi]$ zijn dit de punten 0, π en 2π. In deze punten heeft de grafiek een horizontale raaklijn, maar dit levert geen maximum of minimum van de functie op $[0{,}2\pi]$ (zie ook de grafiek). Een punt als $(\pi{,}0)$ wordt wel een *lokaal maximum* genoemd, vlak in de buurt van π is het een maximum.

De vergelijking $3\cos^2 x - 1 = 0$ lossen we als volgt op:

$$\begin{aligned} & 3\cos^2 x - 1 = 0 && \{\text{breng 1 naar rechts en deel door 3}\} \\ \Leftrightarrow\quad & \cos^2 x = \tfrac{1}{3} && \{\text{standaardvergelijking}\} \\ \Leftrightarrow\quad & \cos x = \sqrt{\tfrac{1}{3}} \ \vee\ \cos x = -\sqrt{\tfrac{1}{3}} \end{aligned}$$

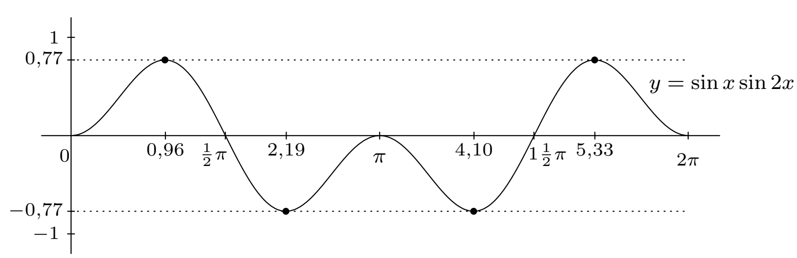
$\cos x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ geeft: $x = \boxed{\cos^{-1}}\sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}955317 + 2k\pi$ of $x = -\boxed{\cos^{-1}}\sqrt{\frac{1}{3}} = -0{,}955317 + 2k\pi$.
Binnen het interval $[0{,}2\pi]$ zijn dit $x = 0{,}955317$ en $x = 2\pi - 0{,}955317$ $(= 5{,}32787)$.

$\cos x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$ geeft: $x = \boxed{\cos^{-1}}\sqrt{-\frac{1}{3}} = 2{,}18628 + 2k\pi$ of $x = -\boxed{\cos^{-1}}\sqrt{-\frac{1}{3}} = -2{,}18628 + 2k\pi$.
Binnen het interval $[0{,}2\pi]$ zijn dit $x = 2{,}18628$ en $x = 2\pi - 2{,}18628$ $(= 4{,}09691)$.

c. Als de functie een maximum of minimum heeft, dan is daar de afgeleide 0.
Invullen van de gevonden x-waarden van onderdeel b geeft als punten van de grafiek:
$(0{,}96, 0{,}77)$, $(2{,}19, -0{,}77)$, $(4{,}10, -0{,}77)$ en $(5{,}33, 0{,}77)$.

Het maximum is dus 0,77 en het minimum $-0{,}77$, zie de onderstaande aangevulde grafiek.

Je kunt de coördinaten van de eerste top (x, y) ook exact berekenen:
Uit $\cos x = \sqrt{\frac{1}{3}}$ volgt $\sin x = \sqrt{\frac{2}{3}}$, want $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ en x ligt in het eerste kwadrant.
Dus geldt $f(x) = \sin x \sin 2x = \sin x \cdot 2\sin x \cos x = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = \dfrac{4}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{9}\sqrt{3}$.
Het exacte maximum is dus $\frac{4}{9}\sqrt{3} \approx 0{,}77$ en het exacte minimum is $-\frac{4}{9}\sqrt{3} \approx -0{,}77$.



6. a. $p = \dfrac{c}{V} = cV^{-1} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -cV^{-2} = -\dfrac{c}{V^2}$

$V = \dfrac{10}{t+1} \;\Rightarrow\; \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{10}{(t+1)^2}$

b. $p = \dfrac{c}{V} \;\wedge\; V = \dfrac{10}{t+1} \;\Rightarrow\; p = \dfrac{c}{\left(\dfrac{10}{t+1}\right)} = c \cdot \dfrac{t+1}{10} = \frac{1}{10}c(t+1)$

Dus $p = \frac{1}{10}c(t+1)$ en daaruit volgt $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{10}c.$

c. Op $t = 4$ geldt $V = \dfrac{10}{4+1} = 2$ en dus: $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = -\dfrac{c}{V^2} = -\dfrac{c}{2^2} = -\frac{1}{4}c$

Verder geldt op $t = 4$: $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{10}{(4+1)^2} = -\frac{10}{25} = -\frac{2}{5}$

Dus $\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} \cdot \dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4}c \cdot -\frac{2}{5} = \frac{1}{10}c$

Dit stemt overeen met het resultaat van onderdeel b.

De behandeling van de algemene vorm:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

komt in deel 2 van de serie *Wiskunde voor bachelor en master* aan de orde.