Wiskunde voor bachelor en master
Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden

Uitwerkingen hoofdstuk 6

6.2.1

1. a.
$$\begin{aligned} & x^3 - 9x^2 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2(x-9) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x^2 = 0 \ \vee\ x - 9 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 0 \ \vee\ x = 9 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} & t^3 - 9t = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & t(t^2 - 9) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & t(t-3)(t+3) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & t = 0 \ \vee\ t = 3 \ \vee\ t = -3 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} & r^3 = 5r \\ \Leftrightarrow\quad & r^3 - 5r = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & r(r^2 - 5) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & r(r - \sqrt{5})(r + \sqrt{5}) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & r = 0 \ \vee\ r = \sqrt{5} \ \vee\ r = -\sqrt{5} \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} & a^2 - \tfrac{1}{4} = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (a - \tfrac{1}{2})(a + \tfrac{1}{2}) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & a = \tfrac{1}{2} \ \vee\ a = -\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} & x^2 + 7x + 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (x+4)(x+3) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x = -4 \ \vee\ x = -3 \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} & h^2 - 7h + 12 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (h-3)(h-4) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & h = 3 \ \vee \ h = 4 \end{aligned}$$

g.
$$\begin{aligned} & x^2 + 7x + 10 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x+2)(x+5) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = -2 \ \vee \ x = -5 \end{aligned}$$

h.
$$\begin{aligned} & h^2 - 7h + 6 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (h-1)(h-6) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & h = 1 \ \vee \ h = 6 \end{aligned}$$

2. a.
$$\begin{aligned} & x^2 - x - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (x-4)(x+3) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x = 4 \ \vee \ x = -3 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} & a^2 + a - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (a+4)(a-3) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a = -4 \ \vee \ a = 3 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} & t^2 - 9 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & t^2 = 9 \\ \Leftrightarrow \quad & t = 3 \ \vee \ t = -3 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} & 2t^2 - 8 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & t^2 - 4 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (t-2)(t+2) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & t = 2 \ \vee \ t = -2 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} & r^4 - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & r^4 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & r = 1 \ \vee \ r = -1 \end{aligned}$$

f.
$$
\begin{aligned}
& 3x^2 - 12x - 63 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 4x - 21 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-7)(x+3) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 7 \ \vee\ x = -3
\end{aligned}
$$

3. a.
$$
\begin{aligned}
& 2x^3 - 2x^2 - 24x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 - x^2 - 12x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(x^2 - x - 12) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(x-4)(x+3) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \vee\ x = 4 \ \vee\ x = -3
\end{aligned}
$$

b.
$$
\begin{aligned}
& 3x^2 + 3x = 36 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + x = 12 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + x - 12 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+4)(x-3) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = -4 \ \vee\ x = 3
\end{aligned}
$$

c.
$$
\begin{aligned}
& x^2 - 15x = 54 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 15x - 54 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-18)(x+3) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 18 \ \vee\ x = -3
\end{aligned}
$$

d.
$$
\begin{aligned}
& 2x^2 = 2x + 60 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 = x + 30 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - x - 30 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-6)(x+5) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 6 \ \vee\ x = -5
\end{aligned}
$$

e.
$$
\begin{aligned}
& (x^2 - 3x + 2)(x^2 + 3x + 2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-1)(x-2)(x+1)(x+2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 1 \ \vee\ x = 2 \ \vee\ x = -1 \ \vee\ x = -2
\end{aligned}
$$

f.
$$
\begin{aligned}
& x^4 = 3^4 \\
\Leftrightarrow\quad & x^4 - 3^4 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x^2 + 3^2)(x^2 - 3^2) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x^2 + 3^2)(x - 3)(x + 3) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 3 \ \vee \ x = -3
\end{aligned}
$$

Uit $x^2 \geq 0$ volgt $x^2 + 3^2 \geq 9$, dus het deel $(x^2 + 3^2) = 0$ heeft geen oplossing.

6.3.1

1. a.
$$\begin{aligned} & x^2-4x+2=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2-4+2=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x-2)^2=2 \\ \Leftrightarrow\ & x-2=\sqrt{2} \ \vee\ x-2=-\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\ & x=2+\sqrt{2} \ \vee\ x=2-\sqrt{2} \end{aligned}$$

   b.
$$\begin{aligned} & t^2-8t+14=0 \\ \Leftrightarrow\ & (t-4)^2-16+14=0 \\ \Leftrightarrow\ & (t-4)^2=2 \\ \Leftrightarrow\ & t-4=\sqrt{2} \ \vee\ t-4=-\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow\ & t=4+\sqrt{2} \ \vee\ t=4-\sqrt{2} \end{aligned}$$

   c.
$$\begin{aligned} & r^2=6r+1 \\ \Leftrightarrow\ & r^2-6r-1=0 \\ \Leftrightarrow\ & (r-3)^2-9-1=0 \\ \Leftrightarrow\ & (r-3)^2=10 \\ \Leftrightarrow\ & r-3=\sqrt{10} \ \vee\ r-3=-\sqrt{10} \\ \Leftrightarrow\ & r=3+\sqrt{10} \ \vee\ r=3-\sqrt{10} \end{aligned}$$

   d.
$$\begin{aligned} & a^2+a+1=0 \\ \Leftrightarrow\ & (a+\tfrac{1}{2})^2-\tfrac{1}{4}+1=0 \\ \Leftrightarrow\ & (a+\tfrac{1}{2})^2=-\tfrac{3}{4} \end{aligned}$$
   geen oplossingen: een kwadraat is niet negatief

   e.
$$\begin{aligned} & x^2+7x+12=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+\tfrac{7}{2})^2-\tfrac{49}{4}+12=0 \\ \Leftrightarrow\ & (x+\tfrac{7}{2})^2=\tfrac{1}{4} \\ \Leftrightarrow\ & x+\tfrac{7}{2}=\tfrac{1}{2} \ \vee\ x+\tfrac{7}{2}=-\tfrac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x=-3 \ \vee\ x=-4 \end{aligned}$$

f.
$$
\begin{aligned}
& h^2 - 7h + 12 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (h-4)(h-3) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & h = 4 \ \vee\ h = 3
\end{aligned}
$$

2. a.
$$
\begin{aligned}
& x^2 - 4x = A \\
\Leftrightarrow\ & (x-2)^2 - 4 = A \\
\Leftrightarrow\ & (x-2)^2 = A + 4 \\
\Leftrightarrow\ & x - 2 = \sqrt{A+4} \ \vee\ x - 2 = -\sqrt{A+4} \\
\Leftrightarrow\ & x = 2 + \sqrt{A+4} \ \vee\ x = 2 - \sqrt{A+4}
\end{aligned}
$$

b.
$$
\begin{aligned}
& x^2 - 8x = \omega^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x-4)^2 - 16 = \omega^2 \\
\Leftrightarrow\ & (x-4)^2 = \omega^2 + 16 \\
\Leftrightarrow\ & x - 4 = \sqrt{\omega^2+16} \ \vee\ x - 4 = -\sqrt{\omega^2+16} \\
\Leftrightarrow\ & x = 4 + \sqrt{\omega^2+16} \ \vee\ x = 4 - \sqrt{\omega^2+16}
\end{aligned}
$$

c.
$$
\begin{aligned}
& x^2 = 6x + B \\
\Leftrightarrow\ & x^2 - 6x + 9 = B + 9 \\
\Leftrightarrow\ & (x-3)^2 = B + 9 \\
\Leftrightarrow\ & x = 3 + \sqrt{B+9} \ \vee\ x = 3 - \sqrt{B+9}
\end{aligned}
$$

d.
$$
\begin{aligned}
& x^2 + 2\omega x + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+\omega)^2 - \omega^2 + 1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+\omega)^2 = \omega^2 - 1 \\
\Leftrightarrow\ & x + \omega = \sqrt{\omega^2-1} \ \vee\ x + \omega = -\sqrt{\omega^2-1} \\
\Leftrightarrow\ & x = -\omega + \sqrt{\omega^2-1} \ \vee\ x = -\omega - \sqrt{\omega^2-1}
\end{aligned}
$$

e.
$$
\begin{aligned}
& x^2 + 4x + h^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+2)^2 - 4 + h^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+2)^2 = 4 - h^2 \\
\Leftrightarrow\ & x + 2 = \sqrt{4-h^2} \ \vee\ x + 2 = -\sqrt{4-h^2} \\
\Leftrightarrow\ & x = -2 + \sqrt{4-h^2} \ \vee\ x = -2 - \sqrt{4-h^2}
\end{aligned}
$$

f. $x^2 - 2px - 2p^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-p)^2 - p^2 - 2p^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x-p)^2 = 3p^2$

$\Leftrightarrow \quad x - p = \sqrt{3p^2} \ \vee \ x - p = -\sqrt{3p^2}$

$\Leftrightarrow \quad x = p + |p|\sqrt{3} \ \vee \ x = p - |p|\sqrt{3}$

Voor $p \geq 0$ geldt $|p| = p$ en wordt het: $x = p + p\sqrt{3} \ \vee \ x = p - p\sqrt{3}$

Voor $p < 0$ geldt $|p| = -p$ en wordt het: $x = p - p\sqrt{3} \ \vee \ x = p + p\sqrt{3}$

Dit zijn dezelfde oplossingen, dus de eindoplossing is: $x = p + p\sqrt{3} \quad \vee \quad x = p - p\sqrt{3}$

Je kunt p buiten haakjes halen en het ook schrijven als:

$x = p\cdot(1 + \sqrt{3}) \quad \vee \quad x = p\cdot(1 - \sqrt{3})$

6.4.1

1. a.

$$x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad \{\text{discriminant: } (-4)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}2 = 16 - 8 = 8\}$$
$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 2 \pm \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 2 + \sqrt{2} \ \vee \ x = 2 - \sqrt{2}$$

b.

$$x^2 - 8x + 14 = 0 \qquad \{\text{discriminant: } (-8)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}14 = 64 - 56 = 8\}$$
$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 4 \pm \sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 4 + \sqrt{2} \ \vee \ x = 4 - \sqrt{2}$$

c.

$$t^2 = 6t + 1 \qquad \{6t + 1 \text{ naar links}\}$$
$$\Leftrightarrow \quad t^2 - 6t - 1 = 0 \qquad \{\text{discriminant: } (-6)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}{-1} = 36 + 4 = 40\}$$
$$\Leftrightarrow \quad t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{10}}{2} = 3 \pm \sqrt{10}$$
$$\Leftrightarrow \quad t = 3 + \sqrt{10} \ \vee \ t = 3 - \sqrt{10}$$

d.

$$h^2 + h + 1 = 0 \qquad \{\text{discriminant: } 1^2 - 4{\cdot}1{\cdot}1 = 1 - 4 = -3\}$$

De discriminant is negatief: de vergelijking heeft geen oplossingen.

e.

$$x^2 + 7x + 12 = 0 \qquad \{\text{discriminant: } 7^2 - 4{\cdot}1{\cdot}12 = 1\}$$
$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2} = -3\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = -4 \ \vee \ x = -3$$

f.

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \qquad \{\text{discriminant: } (-7)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}12 = 1\}$$
$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = 3\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x = 3 \ \vee \ x = 4$$

2\. a. $3t^2 - 3t + 1 = 0$ $\{$discriminant: $(-3)^2 - 4{\cdot}3{\cdot}1 = 9 - 12 = -3\}$

De discriminant is negatief: de vergelijking heeft geen oplossingen.

b. $3t^2 + 3t + 1 = 0$ $\{$discriminant: $3^2 - 4{\cdot}3{\cdot}1 = 9 - 12 = -3\}$

De discriminant is negatief: de vergelijking heeft geen oplossingen.

c.
$$\begin{aligned} & 4x^2 + 4x - 8 = 0 && \{\text{deel door } 4\} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 + x - 2 = 0 && \{\text{discriminant: } 1^2 - 4{\cdot}1{\cdot}{-2} = 1 + 8 = 9\} \\ \Leftrightarrow\ & x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 \ \vee\ x = -2 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} & 4x^2 - 4x - 8 = 0 && \{\text{deel door } 4\} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x - 2 = 0 && \{\text{discriminant: } (-1)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}{-2} = 1 + 8 = 9\} \\ \Leftrightarrow\ & x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = 2 \ \vee\ x = -1 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} & x^2 + 5x - 4 = 0 && \{\text{discriminant: } 5^2 - 4{\cdot}1{\cdot}{-4} = 25 + 16 = 41\} \\ \Leftrightarrow\ & x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{41}}{2} = -2\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{41} \\ \Leftrightarrow\ & x = -2\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{41} \ \vee\ x = -2\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{41} \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} & a^2 + 2a - 12 = 0 && \{\text{discriminant: } 2^2 - 4{\cdot}1{\cdot}{-12} = 4 + 48 = 52\} \\ \Leftrightarrow\ & a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{52}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{13}}{2} = -1 \pm \sqrt{13} \\ \Leftrightarrow\ & a = -1 + \sqrt{13} \ \vee\ a = -1 - \sqrt{13} \end{aligned}$$

3. a.

$$
\begin{array}{lll}
 & 4x^2 + 6x + 2 = 0 & \{\text{deel door } 2\} \\
\Leftrightarrow & 2x^2 + 3x + 1 = 0 & \{\text{discriminant: } 3^2 - 4\cdot 2\cdot 1 = 9 - 8 = 1\} \\
\Leftrightarrow & x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{1}}{4} = \dfrac{-3 \pm 1}{4} & \\
\Leftrightarrow & x = -1 \ \vee\ x = -\frac{1}{2} &
\end{array}
$$

b.

$$
\begin{array}{lll}
 & 2x^2 + x - 6 = 0 & \{\text{discriminant: } 1^2 - 4\cdot 2\cdot -6 = 1 + 48 = 49\} \\
\Leftrightarrow & x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{49}}{4} = \dfrac{-1 \pm 7}{4} & \\
\Leftrightarrow & x = -2 \ \vee\ x = 1\frac{1}{2} &
\end{array}
$$

c.

$$
3t^2 - 4t + 4 = 0 \qquad \{\text{discriminant: } (-4)^2 - 4\cdot 3\cdot 4 = 16 - 48 = -32\ \}
$$

De discriminant is negatief: de vergelijking heeft geen oplossingen.

d.

$$
\begin{array}{lll}
 & 5x^2 - 8x - 4 = 0 & \{\text{discriminant: } (-8)^2 - 4\cdot 5\cdot -4 = 64 + 80 = 144\} \\
\Leftrightarrow & x_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{144}}{10} = \dfrac{8 \pm 12}{10} & \\
\Leftrightarrow & x = 2 \ \vee\ x = -\frac{2}{5} &
\end{array}
$$

e.

$$
\begin{array}{lll}
 & (x^2+1)^6 - 2x(x^2+1)^5 = 0 & \{(x^2+1)^5 \text{ buiten haakjes halen}\} \\
\Leftrightarrow & (x^2+1)^5((x^2+1) - 2x) = 0 & \{\text{uitwerken}\} \\
\Leftrightarrow & (x^2+1)^5(x^2 - 2x + 1) = 0 & \{\text{merkwaardig product}\} \\
\Leftrightarrow & (x^2+1)^5(x-1)^2 = 0 & \{\text{product is } 0\} \\
\Leftrightarrow & x^2 + 1 = 0 \ \vee\ x - 1 = 0 & \{x^2 + 1 \geq 1, \text{ dus het eerste deel heeft geen oplossingen}\} \\
\Leftrightarrow & x = 1 &
\end{array}
$$

f.

$$
\begin{array}{lll}
 & (x^2-1)^6 = 2x(x^2-1)^5 & \{2x(x^2-1)^5 \text{ naar links}\} \\
\Leftrightarrow & (x^2-1)^6 - 2x(x^2-1)^5 = 0 & \{(x^2-1)^5 \text{ buiten haakjes halen}\} \\
\Leftrightarrow & (x^2-1)^5((x^2-1) - 2x) = 0 & \{\text{uitwerken}\} \\
\Leftrightarrow & (x^2-1)^5(x^2 - 2x - 1) = 0 & \{\text{product is } 0\} \\
\Leftrightarrow & x^2 - 1 = 0 \ \vee\ x^2 - 2x - 1 = 0 & \{\text{standaard oplossen}\} \\
\Leftrightarrow & x^2 = 1 \ \vee\ x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = \dfrac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} & \\
\Leftrightarrow & x = 1 \ \vee\ x = -1 \ \vee\ x = 1 + \sqrt{2} \ \vee\ x = 1 - \sqrt{2} &
\end{array}
$$

4. a.

$$2x^2 + 4x = A^2 \qquad \{A^2 \text{ naar links}\}$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2 + 4x - A^2 = 0 \qquad \{\text{discriminant: } 4^2 - 4{\cdot}2{\cdot}{-A^2} = 16 + 8A^2\ \}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 8A^2}}{4} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{4 + 2A^2}}{4} = -1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{4 + 2A^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{4 + 2A^2} \ \vee\ x = -1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{4 + 2A^2}$$

Merk op dat $4 + 2A^2 > 0$ voor alle waarden van A.
De vergelijking heeft dus altijd twee verschillende oplossingen.

b.

$$x^2 + 2Ax - 6 = 0 \qquad \{\text{discriminant: } (2A)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}{-6} = 4A^2 + 24\}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-2A \pm \sqrt{4A^2 + 24}}{2} = \frac{-2A \pm 2\sqrt{A^2 + 6}}{2} = -A \pm \sqrt{A^2 + 6}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -A + \sqrt{A^2 + 6} \ \vee\ x = -A - \sqrt{A^2 + 6}$$

Merk op dat $A^2 + 6 > 0$ voor alle waarden van A.
De vergelijking heeft dus altijd twee verschillende oplossingen.

c.

$$3x^2 - 4\omega t - 4\omega^2 = 0$$

$$\{\text{discriminant: } (-4\omega)^2 - 4{\cdot}3{\cdot}{-4\omega^2} = 16\omega^2 + 48\omega^2 = 64\omega^2\}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{4\omega \pm \sqrt{64\omega^2}}{6} = \frac{4\omega \pm 8\omega}{6}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2\omega \ \vee\ x = -\tfrac{2}{3}\omega$$

d.

$$2x^2 - 8x - 4AB = 0 \qquad \{\text{deel door } 2\}$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 4x - 2AB = 0 \qquad \{\text{discriminant: } (-4)^2 - 4{\cdot}1{\cdot}{-2AB} = 16 + 8AB\}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 8AB}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{4 + 2AB}}{2} = 2 \pm \sqrt{2AB + 4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2 + \sqrt{2AB + 4} \ \vee\ x = 2 - \sqrt{2AB + 4}$$

Merk op dat er geen wortels zijn als $2AB + 4 < 0$, dus als $AB < -2$.

6.5.1

1. a.

$$\begin{aligned} & x = \sqrt{x} && \{\text{kwadrateer, geen equivalentie}\} \\ \Rightarrow\ & x^2 = x && \{x \text{ naar links}\} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 - x = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x(x-1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \text{ (voldoet)} \ \vee \ x = 1 \text{ (voldoet)} \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} & x = \sqrt{x} && \{\text{substitutie } \sqrt{x} = y, \text{ dus } x = y^2\} \\ \Rightarrow\ & y^2 = y && \{y \text{ naar links}\} \\ \Leftrightarrow\ & y^2 - y = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y(y-1) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y = 0 \ \vee \ y = 1 && \{x = y^2\} \\ \Leftrightarrow\ & x = 0 \text{ (voldoet)} \ \vee \ x = 1 \text{ (voldoet)} \end{aligned}$$

2. Oplossen van de vergelijking $x - \sqrt{x+10} = 2$:

a.

$$\begin{aligned} & \sqrt{x+10} = y && \{\text{kwadrateer, geen equivalentie}\} \\ \Rightarrow\ & x + 10 = y^2 && \{10 \text{ naar rechts}\} \\ \Leftrightarrow\ & x = y^2 - 10 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} & x - \sqrt{x+10} = 2 && \{\text{substitutie } \sqrt{x+10} = y, \text{ dus } x = y^2 - 10, \text{ zie onderdeel a.}\} \\ \Rightarrow\ & y^2 - 10 - y = 2 && \{2 \text{ naar links}\} \\ \Leftrightarrow\ & y^2 - y - 12 = 0 \\ \Leftrightarrow\ & (y+3)(y-4) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & y = -3 \ \vee \ y = 4 && \{x = y^2 - 10\} \\ \Leftrightarrow\ & x = (-3)^2 - 10 = -1 \ \vee \ x = 4^2 - 10 = 6 \end{aligned}$$

c. Substitutie van $x = -1$ in $x - \sqrt{x+10} = 2$ levert: $-1 - \sqrt{9} = 2$ en dat is onjuist.
Substitutie van $x = 6$ in $x - \sqrt{x+10} = 2$ levert: $6 - \sqrt{16} = 2$ en dat is juist.

De vergelijking heeft dus één oplossing, namelijk $x = 6$.

Je had dit resultaat ook kunnen concluderen uit $y = \sqrt{x+10} \ \Rightarrow \ y \geq 0$.
Daaruit volgt dat $y = -3$ niet voldoet en blijft alleen $y = 4$, dus $x = 6$ over.

3. Oplossen van de vergelijking $(2x+1)^2+2x+1=2$:

a.

$$
\begin{array}{lll}
 & (2x{+}1)^2{+}2x{+}1=2 & \{\text{substitutie } 2x{+}1=y\text{, equivalent met } x=\dfrac{y-1}{2}\} \\
\Leftrightarrow & y^2+y=2 & \{2 \text{ naar links}\} \\
\Leftrightarrow & y^2+y-2=0 & \\
\Leftrightarrow & (y-1)(y+2)=0 & \\
\Leftrightarrow & y=1 \;\vee\; y=-2 & \{x=\dfrac{y-1}{2}\} \\
\Leftrightarrow & x=0 \;\vee\; x-\frac{3}{2} &
\end{array}
$$

b.

$$
\begin{array}{lll}
 & (2x+1)^2+2x+1=2 & \{\text{haakjes uitwerken}\} \\
\Leftrightarrow & 4x^2+4x+1+2x+1=2 & \{2 \text{ naar links}\} \\
\Leftrightarrow & 4x^2+6x=0 & \\
\Leftrightarrow & 2x(2x+3)=0 & \\
\Leftrightarrow & x=0 \;\vee\; x=-\frac{3}{2} &
\end{array}
$$

4. a.

$$
\begin{array}{lll}
 & t+2\sqrt{t}=8 & \{\text{substitutie } \sqrt{t}=y\text{, dus } t=y^2\} \\
\Rightarrow & y^2+2y=8 & \{8 \text{ naar links}\} \\
\Leftrightarrow & y^2+2y-8=0 & \\
\Leftrightarrow & (y-2)(y+4)=0 & \\
\Leftrightarrow & y=2 \;\vee\; y=-4 & \{t=y^2\} \\
\Leftrightarrow & t=4 \text{ (voldoet)} \vee t=16 \text{ (voldoet niet)} &
\end{array}
$$

b.

$$
\begin{array}{lll}
 & t^4+2t^2=8 & \{\text{substitutie } t^2=y\} \\
\Rightarrow & y^2+2y=8 & \{\text{zie onderdeel a.}\} \\
\Leftrightarrow & y=-4 \;\vee\; y=2 & \{t^2=y\} \\
\Leftrightarrow & t^2=-4 \;\vee\; t^2=2 & \{t^2=-4 \text{ heeft geen oplossingen}\} \\
\Leftrightarrow & t=\sqrt{2} \;\vee\; t=-\sqrt{2} &
\end{array}
$$

c.

$$
\begin{array}{lll}
 & t^6+2t^3=8 & \{\text{substitutie } t^3=y\text{, equivalent met } t=\sqrt[3]{y}\} \\
\Leftrightarrow & y^2+2y=8 & \{\text{zie onderdeel a.}\} \\
\Leftrightarrow & y=2 \;\vee\; y=-4 & \{t=\sqrt[3]{y}\} \\
\Leftrightarrow & t=\sqrt[3]{2} \;\vee\; t=-\sqrt[3]{4} &
\end{array}
$$

d.
$$
\begin{aligned}
& t^2+2t=8 \\
\Leftrightarrow\ & t^2+2t-8=0 \\
\Leftrightarrow\ & (t-2)(t+4)=0 \\
\Leftrightarrow\ & t=2 \ \vee\ t=-4
\end{aligned}
$$

e.
$$
\begin{aligned}
& t^3+2t\sqrt{t}=8 && \{\text{substitutie } t\sqrt{t}=y\} \\
\Rightarrow\ & y^2+2y=8 && \{\text{zie onderdeel a.}\} \\
\Leftrightarrow\ & y=2 \ \vee\ y=-4 && \{t\sqrt{t}=y\} \\
\Leftrightarrow\ & t\sqrt{t}=2 \ \vee\ t\sqrt{t}=-4 && \{t\sqrt{t}\geq 0, \text{ dus het tweede deel heeft geen oplossingen}\} \\
\Leftrightarrow\ & t\sqrt{t}=2 && \{\text{kwadrateer}\} \\
\Rightarrow\ & t^3=4 \\
\Leftrightarrow\ & t=\sqrt[3]{4}
\end{aligned}
$$

Controle: $(\sqrt[3]{4})^3+2\sqrt[3]{4}\sqrt{\sqrt[3]{4}}=4+2\cdot 4^{\frac{1}{3}}\cdot(4^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}=4+2\cdot 4^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=4+2\cdot 4^{\frac{1}{2}}=4+2\cdot 2=8$

f.
$$
\begin{aligned}
& (t^2-4)^2+2(t^2-4)=8 && \{\text{substitutie } t^2-4=y\} \\
\Leftrightarrow\ & y^2+2y=8 && \{\text{zie onderdeel a.}\} \\
\Leftrightarrow\ & y=-4 \ \vee\ y=2 && \{t^2-4=y\} \\
\Leftrightarrow\ & t^2-4=-4 \ \vee\ t^2-4=2 \\
\Leftrightarrow\ & t^2=0 \ \vee\ t^2=6 \\
\Leftrightarrow\ & t=0 \ \vee\ t=\sqrt{6} \ \vee\ t=-\sqrt{6}
\end{aligned}
$$

5. Oplossen van de vergelijking $x^2-1=\dfrac{1}{x^2-1}$:

a.
$$
\begin{aligned}
& x^2-1=\frac{1}{x^2-1} && \{\text{substitutie } x^2=y\} \\
\Leftrightarrow\ & y-1=\frac{1}{y-1} && \{\text{kruislings vermenigvuldigen, } y\neq 1\} \\
\Leftrightarrow\ & (y-1)^2=1 \\
\Leftrightarrow\ & y^2-2y=0 \\
\Leftrightarrow\ & y=0 \ \vee\ y=2 && \{\text{voldoen beide, } y=x^2\} \\
\Leftrightarrow\ & x^2=0 \ \vee\ x^2=2 \\
\Leftrightarrow\ & x=0 \ \vee\ x=\sqrt{2} \ \vee\ x=-\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

b. $x^2 - 1 = \dfrac{1}{x^2-1}$ {substitutie $x^2 - 1 = y$}

$\Leftrightarrow$ $y = \dfrac{1}{y}$ {kruislings vermenigvuldigen, $y \neq 0$}

$\Leftrightarrow$ $y^2 = 1$

$\Leftrightarrow$ $y = -1 \ \vee \ y = 1$ {voldoen beide, $y = x^2 - 1$}

$\Leftrightarrow$ $x^2 - 1 = -1 \ \vee \ x^2 - 1 = 1$

$\Leftrightarrow$ $x^2 = 0 \ \vee \ x^2 = 2$

$\Leftrightarrow$ $x = 0 \ \vee \ x = \sqrt{2} \ \vee \ x = -\sqrt{2}$

6. a. $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{3}{x} + 2 = 0$ {substitutie $\dfrac{1}{x} = y$, equivalent met $x = \dfrac{1}{y}$}

$\Leftrightarrow$ $y^2 - 3y + 2 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(y-1)(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow$ $y = 1 \ \vee \ y = 2$ {$x = \dfrac{1}{y}$}

$\Leftrightarrow$ $x = 1 \ \vee \ x = \frac{1}{2}$

b. $\dfrac{3}{(2x+1)^5} = 27$ {kruislings vermenigvuldigen, $x \neq -\frac{1}{2}$}

$\Leftrightarrow$ $27(2x+1)^5 = 3$ {deel door 27}

$\Leftrightarrow$ $(2x+1)^5 = \dfrac{1}{9}$ {standaardvergelijking}

$\Leftrightarrow$ $2x + 1 = \sqrt[5]{\dfrac{1}{9}} = \sqrt[5]{\dfrac{9^4}{9^5}} = \frac{1}{9}\sqrt[5]{9^4}$

$\Leftrightarrow$ $2x = -1 + \frac{1}{9}\sqrt[5]{9^4}$

$\Leftrightarrow$ $x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{18}\sqrt[5]{9^4}$

c. $2\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = 0$ {$-\sqrt{x+1}$ naar rechts}

$\Leftrightarrow$ $2\sqrt{x} = \sqrt{x+1}$ {kwadrateer}

$\Rightarrow$ $4x = x + 1$

$\Leftrightarrow$ $x = \frac{1}{3}$

Controle: $2\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{1}{3} + 1} = 2\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} = 2\sqrt{\frac{1}{3}} - 2\sqrt{\frac{1}{3}} = 0$

d.
$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{6} && \{\text{maal } 6x(x+1),\ x \neq 0 \text{ en } x \neq -1\} \\
\Leftrightarrow\ & 6(x+1) - 6x = x(x+1) && \{\text{haakjes uitwerken}\} \\
\Leftrightarrow\ & 6x + 6 - 6x = x^2 + x \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + x - 6 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x-2)(x+3) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 2 \ \vee\ x = -3
\end{aligned}
$$

e.
$$
\begin{aligned}
& \frac{3x^3 - 1}{x^2 + 1} = 3x + 1 && \{\text{maal } x^2 + 1 \text{ (altijd positief)}\} \\
\Leftrightarrow\ & 3x^3 - 1 = (3x+1)(x^2+1) && \{\text{haakjes uitwerken}\} \\
\Leftrightarrow\ & 3x^3 - 1 = 3x^3 + x^2 + 3x + 1 \\
\Leftrightarrow\ & x^2 + 3x + 2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & (x+1)(x+2) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = -1 \ \vee\ x = -2
\end{aligned}
$$

f.
$$
\begin{aligned}
& \sqrt{2x+1} = \frac{5x}{\sqrt{2x+1}} && \{\text{kruislings vermenigvuldigen, voorwaarde: } x > -\tfrac{1}{2}\} \\
\Rightarrow\ & 2x + 1 = 5x \\
\Leftrightarrow\ & 3x = 1 \\
\Leftrightarrow\ & x = \tfrac{1}{3} \ \text{ (voldoet)}
\end{aligned}
$$

7. a.

$$\begin{aligned}
& \sqrt{8-x} = \tfrac{1}{2}x && \{\text{kwadrateren}\} \\
\Rightarrow\quad & 8 - x = \tfrac{1}{4}x^2 && \{\text{maal } 4\} \\
\Leftrightarrow\quad & 32 - 4x = x^2 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 + 4x - 32 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x+8)(x-4) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x = -8 \ \vee\ x = 4
\end{aligned}$$

Invullen van $x = -8$ geeft: $\sqrt{16} = -4$ en dat is onjuist.
Invullen van $x = 4$ geeft: $\sqrt{4} = 2$ en dat is juist.

Er is dus één oplossing, namelijk $x = 4$.

b.

$$\begin{aligned}
& 4\sqrt{x} + x + 4 = 0 && \{x + 4 \text{ naar rechts}\} \\
\Leftrightarrow\quad & 4\sqrt{x} = -(x+4) && \{\text{kwadrateren}\} \\
\Rightarrow\quad & 16x = x^2 + 8x + 16 \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - 8x + 16 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x-4)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 4
\end{aligned}$$

Invullen van $x = 4$ geeft: $4\sqrt{4} + 4 + 4 = 0$ en dat is onjuist.

De vergelijking heeft geen oplossingen.

Je had dit ook als volgt kunnen inzien:

Omdat x onder het wortelteken voorkomt, moet $x \geq 0$ gelden.
Maar dan geldt $4\sqrt{x} + x + 4 \geq 4$, dus $4\sqrt{x} + x + 4 \neq 0$.

c.

$$\begin{aligned}
& x + 3 = 4\sqrt{x} && \{\text{kwadrateren}\} \\
\Rightarrow\quad & x^2 + 6x + 9 = 16x \\
\Leftrightarrow\quad & x^2 - 10x + 9 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (x-1)(x-9) = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & x = 1 \ \vee\ x = 9
\end{aligned}$$

Invullen van $x = 1$ geeft als resultaat: $1 + 3 = 4\sqrt{1}$ en dat is juist.

Invullen van $x = 9$ geeft als resultaat: $9 + 3 = 4\sqrt{9}$ en dat is juist.

De vergelijking heeft twee oplossingen.

d.
$$
\begin{aligned}
& 2x + \sqrt{64 - x^3} = 8 && \{2x \text{ naar rechts}\} \\
\Leftrightarrow\ & \sqrt{64 - x^3} = 8 - 2x && \{\text{kwadrateren}\} \\
\Rightarrow\ & 64 - x^3 = 64 - 32x + 4x^2 \\
\Leftrightarrow\ & x^3 + 4x^2 - 32x = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(x^2 + 4x - 32) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x(x - 4)(x + 8) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x = 0 \ \vee \ x = 4 \ \vee \ x = -8
\end{aligned}
$$

Invullen van $x = 0$ geeft als resultaat: $0 + \sqrt{64} = 8$ en dat is juist.

Invullen van $x = 4$ geeft als resultaat: $8 + \sqrt{0} = 8$ en dat is juist.

Invullen van $x = -8$ geeft als resultaat: $-16 + \sqrt{576} = 8$ en ook dat is juist.

De vergelijking heeft drie oplossingen.