Wiskunde voor bachelor en master

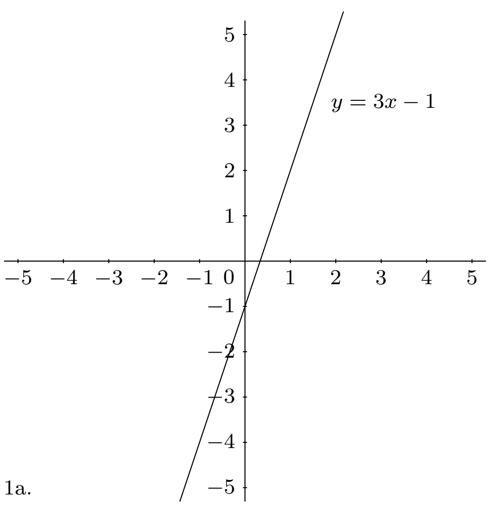
Deel 1 Basiskennis en basisvaardigheden

© 2015, Syntax Media, Utrecht

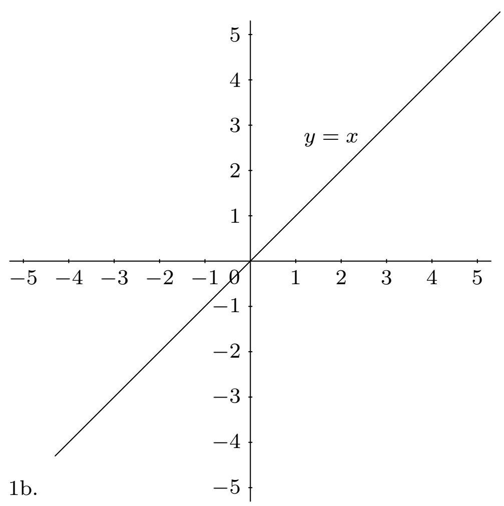
www.syntaxmedia.nl

Uitwerkingen hoofdstuk 9

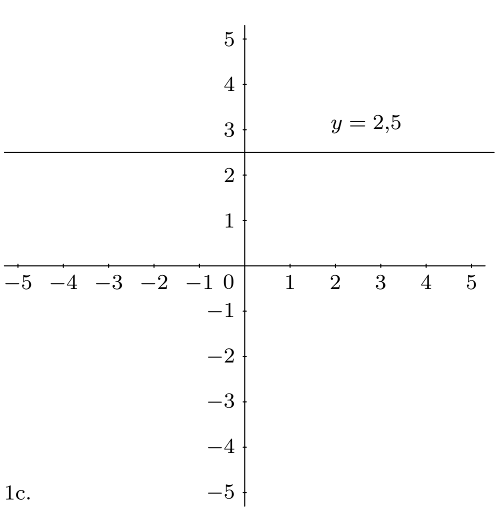
9.2.1



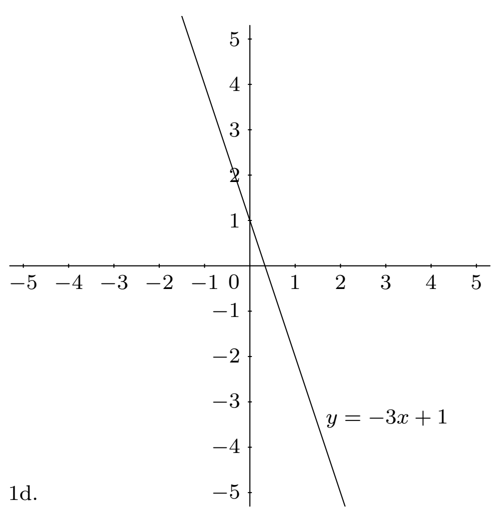
1a.



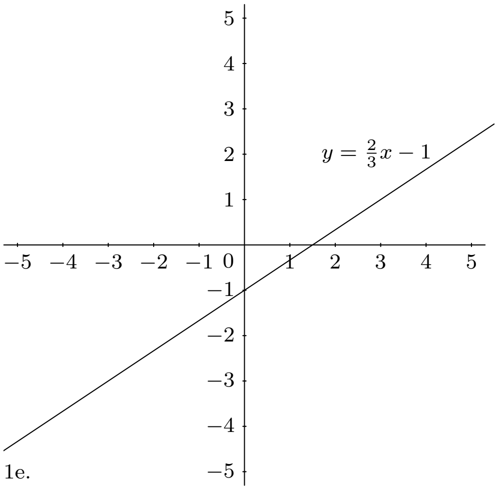
1b.



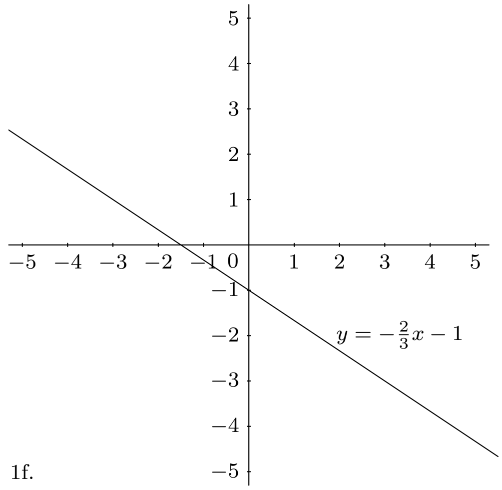
1c.



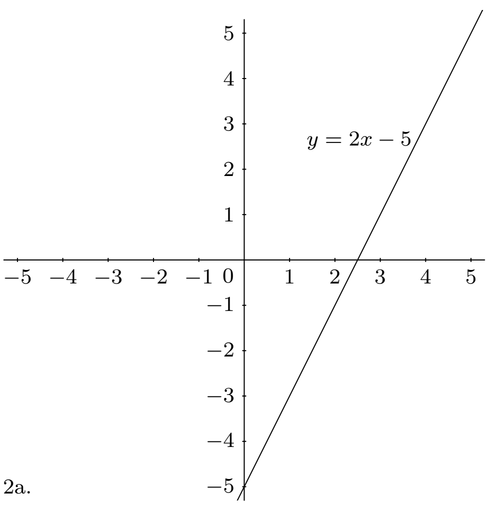
1d.



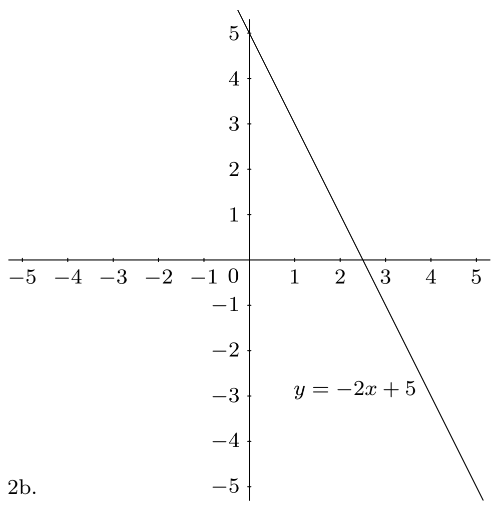
1e.



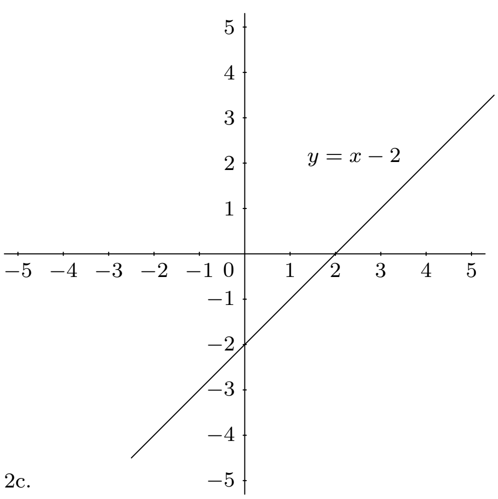
1f.



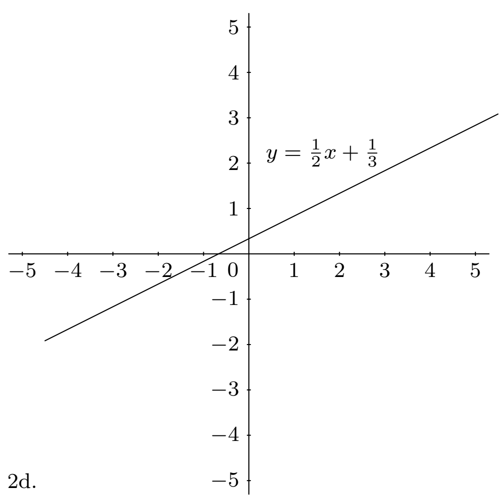
2a.



2b.



2c.



2d.

3. De lijn m door de punten $(-2{,}2)$ en $(4,-1)$ heeft helling:

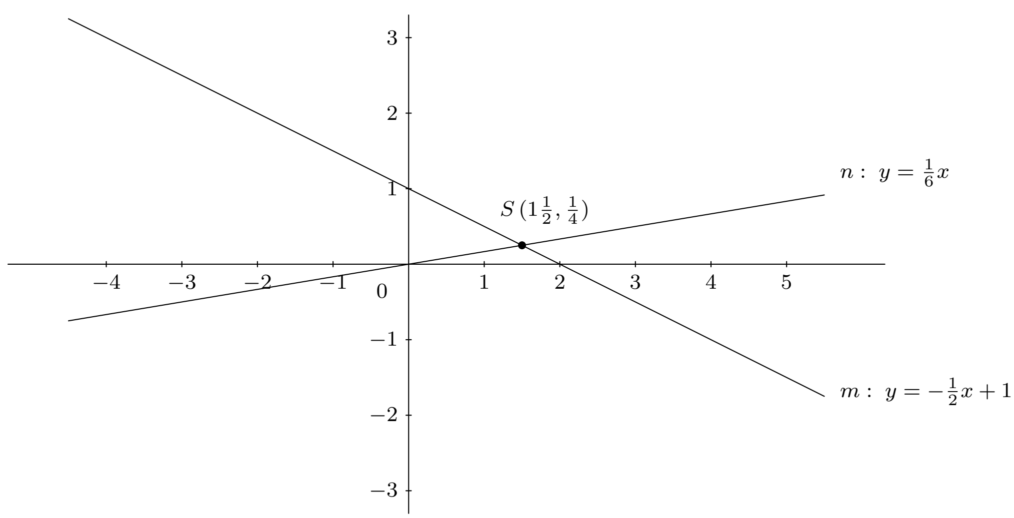
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1-2}{4-(-2)} = \frac{-3}{6} = -\tfrac{1}{2}$$

De vergelijking van m is dus van de vorm $y = -\frac{1}{2}x + b$.
Punt $(-2{,}2)$ ligt op m, invullen geeft $2 = -\frac{1}{2} \cdot -2 + b$, dus $b = 1$.
Conlusie: lijn m heeft vergelijking $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

De lijn n door de punten $(0{,}0)$ en $(6{,}1)$ heeft helling:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-0}{6-0} = \tfrac{1}{6}$$

De vergelijking van n is $y = \frac{1}{6}x + b$. Punt $(0{,}0)$ ligt op m, dus $b = 0$.
Conclusie: lijn n heeft vergelijking $y = \frac{1}{6}x$.



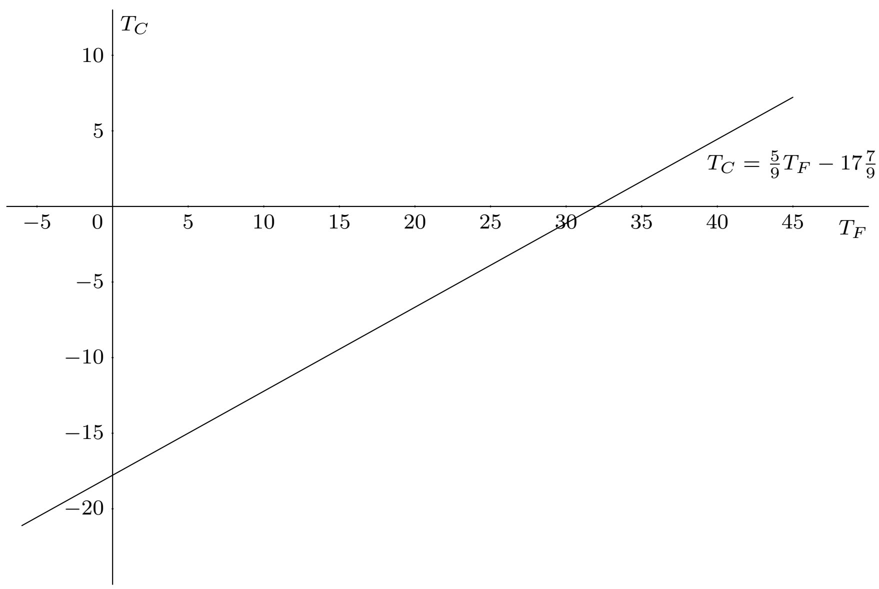
De x-coördinaat van het snijpunt van m en n volgt uit $\frac{1}{6}x = -\frac{1}{2}x + 1$:

$$\begin{aligned} & \tfrac{1}{6}x = -\tfrac{1}{2}x + 1 \qquad \{\text{maal } 6\} \\ \Leftrightarrow\quad & x = -3x + 6 \\ \Leftrightarrow\quad & 4x = 6 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 1\tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Dan geldt voor de y-coördinaat van het snijpunt $y = \frac{1}{6} \cdot 1\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$.

Dus voor het snijpunt S van m en n geldt: $S = (1\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$.

4.
$$\begin{aligned} & T_F = 1{,}8\,T_C + 32 && \{32 \text{ naar links en links en rechts verwisselen}\} \\ \Leftrightarrow\quad & 1{,}8\,T_C = T_F - 32 && \{\text{maal } 10\} \\ \Leftrightarrow\quad & 18T_C = 10T_F - 320 \\ \Leftrightarrow\quad & T_C = \frac{10}{18}T_F - \frac{320}{18} \\ \Leftrightarrow\quad & T_C = \tfrac{5}{9}T_F - 17\tfrac{7}{9} \end{aligned}$$



5. a. De lijn m gaat door (0,2) en (1,0) en heeft dus helling $\dfrac{0-2}{1-0} = -2$.
Invullen van (0,2) geeft als vergelijking $y = -2x + 2$.
Daarbij hoort de functie $f(x) = -2x + 2$.

b. De lijn n loopt horizontaal en heeft dus helling 0. De vorm van de vergelijking is dan $y = b$. Invullen van $(0, -2)$ geeft als vergelijking $y = -2$.
Daarbij hoort de constante functie $f(x) = -2$.

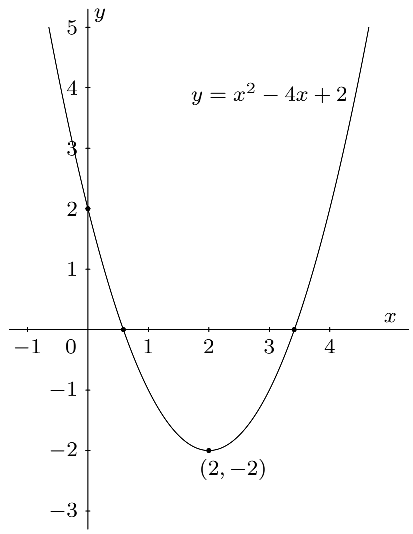
c. De lijn p bestaat uit alle punten met x-cördinaat 3. De vergelijking van de lijn is $x = 3$.
Bij een functie f hoort bij elke x precies één waarde $f(x)$ en in dit geval horen bij $x = 3$ oneindig veel waarden. Bij deze lijn hoort dus *geen* functie.
De lijn heeft ook geen helling. Zo liggen de punten (3,0) en (3,1) op de lijn en de formule voor de helling geeft dan $\dfrac{1-0}{3-3}$ en dat bestaat niet.

d. De lijn q gaat door $(0, -1)$ en (2,0) en heeft helling $\dfrac{0-(-1)}{2-0} = \frac{1}{2}$.
Invullen van $(0, -1)$ in $y = \frac{1}{2}x + b$ levert als vergelijking $y = \frac{1}{2}x - 1$.
Daarbij hoort de functie $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$.

9.3.1

1a. $f(x) = x^2 - 4x + 2$

$$\begin{array}{ll} & x^2 - 4x + 2 \quad \{\text{kwadraatafsplitsen}\} \\ = & (x-2)^2 - 4 + 2 \\ = & (x-2)^2 - 2 \end{array}$$



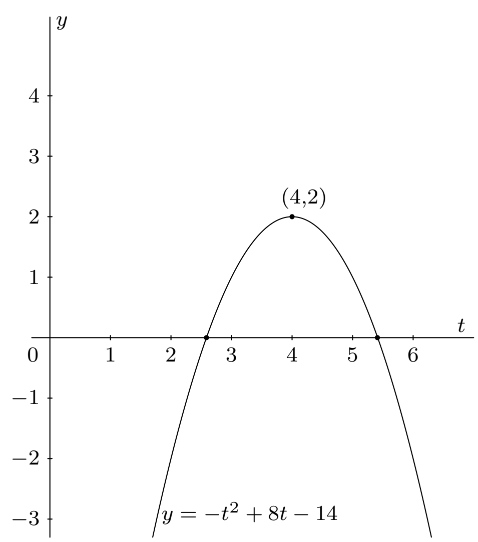
Dus $f(x) = (x-2)^2 - 2$ (grafiek is dalparabool).

symmetrieas: $x = 2$
minimum: $y = -2$ (voor $x = 2$)
nulpunten:

$$\begin{array}{ll} & (x-2)^2 = 2 \\ \Leftrightarrow & x - 2 = \pm\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & x = 2 + \sqrt{2} \ \vee \ x = 2 - \sqrt{2} \end{array}$$

1b. $f(t) = -t^2 + 8t - 14$

$$\begin{array}{lll} & -t^2 + 8t - 14 & \{- \text{ buiten haakjes}\} \\ = & -[t^2 - 8t + 14] & \{\text{kwadraatafsplitsen}\} \\ = & -[(t-4)^2 - 2] & \\ = & -(t-4)^2 + 2 & \end{array}$$



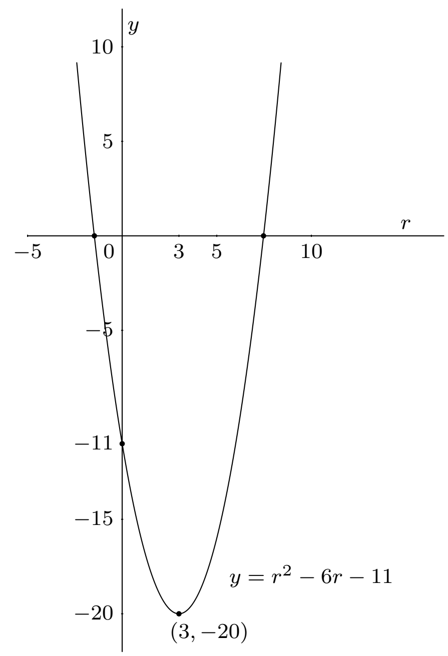
Dus $f(t) = -(t-4)^2 + 2$ (bergparabool).

symmetrieas: $t = 4$
maximum: $y = 2$ (voor $t = 4$)

nulpunten:

$$\begin{array}{ll} & (t-4)^2 = 2 \\ \Leftrightarrow & t - 4 = \pm\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow & t = 4 + \sqrt{2} \ \vee \ t = 4 - \sqrt{2} \end{array}$$

1c. $f(r) = r^2 - 6r - 11$



$$\begin{array}{ll} & r^2 - 6r - 11 \quad \{\text{kwadraatafsplitsen}\} \\ = & (r-3)^2 - 9 - 11 \\ = & (r-3)^2 - 20 \end{array}$$

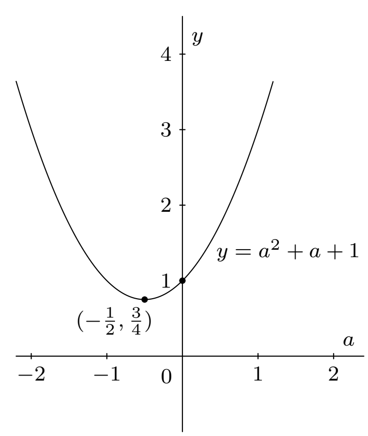
Dus $f(r) = (r-3)^2 - 20$ (dalparabool).

symmetrieas: $r = 3$
minimum: $y = -20$ (voor $r = 3$)
nulpunten:

$$\begin{array}{ll} & (r-3)^2 = 20 \\ \Leftrightarrow & r - 3 = \pm\sqrt{20} \\ \Leftrightarrow & r = 3 + 2\sqrt{5} \ \vee \ r = 3 - 2\sqrt{5} \end{array}$$

1d. $f(a) = a^2 + a + 1$

$$\begin{array}{ll} & a^2 + a + 1 \quad \{\text{kwadraatafsplitsen}\} \\ = & (a + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 1 \\ = & (a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} \end{array}$$



Dus $f(a) = (a + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ (dalparabool).

symmetrieas: $a = -\frac{1}{2}$
minimum: $y = \frac{3}{4}$ (voor $a = -\frac{1}{2}$)

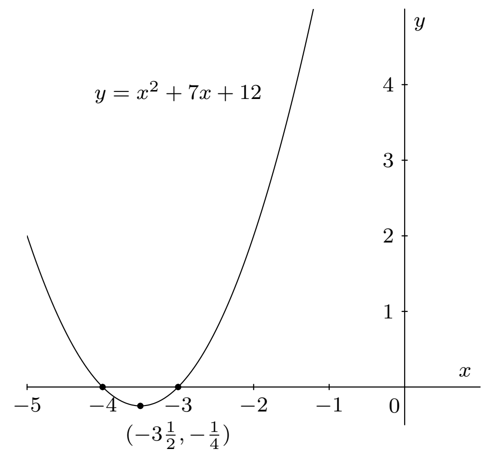
nulpunten:

$$(a + \tfrac{1}{2})^2 = -\tfrac{3}{4}$$

Deze vergelijking heeft geen oplossing.

De functie heeft geen nulpunten.
(Zie ook de grafiek, $f(a) \geq \frac{3}{4}$.)

1e. $f(x) = x^2 + 7x + 12$



De grafiek is een dalparabool.

Uit $x^2 + 7x + 12 = (x+3)(x+4)$ volgt:

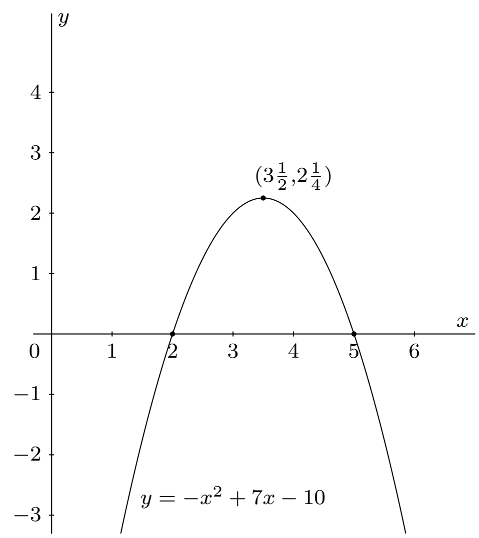
$$f(x) = (x+3)(x+4)$$

nulpunten: $x = -3$ en $x = -4$

symmetrieas: $x = -3\frac{1}{2}$ (tussen de nulpunten)

minimum: $f(-3\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

1f. $f(x) = -x^2 + 7x - 10$



De grafiek is een bergparabool.

Uit

$$-x^2 + 7x - 10 = -(x^2 - 7x + 10) = -(x-2)(x-5)$$

volgt:

$$f(x) = -(x-2)(x-5)$$

nulpunten: $x = 2$ en $x = 5$

symmetrieas: $x = 3\frac{1}{2}$ (tussen de nulpunten)

maximum: $f(3\frac{1}{2}) = -(1\frac{1}{2})(-1\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

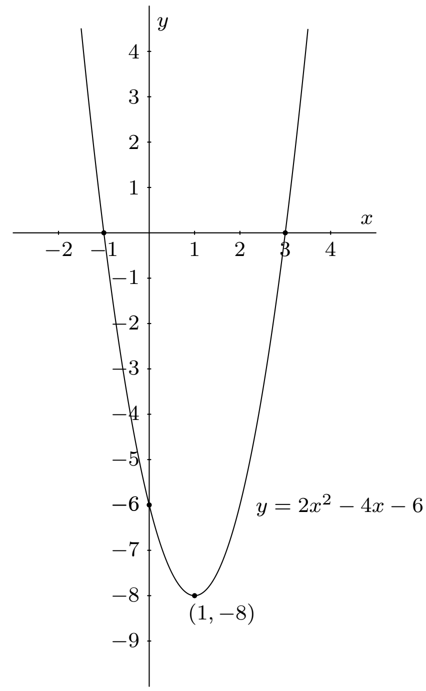
2a. $f(x) = 2x^2 - 4x - 6$

$$
\begin{aligned}
& 2x^2 - 4x - 6 \\
= \quad & 2[x^2 - 2x - 3] \quad \{\text{kwadraatafsplitsen}\} \\
= \quad & 2[(x-1)^2 - 1 - 3] \\
= \quad & 2[(x-1)^2 - 4] \\
= \quad & 2(x-1)^2 - 8
\end{aligned}
$$

Dus $f(x) = 2(x-1)^2 - 8$ (dalparabool).

symmetrieas: $x = 1$
minimum: $y = -8$ (voor $x = 1$)
nulpunten:

$$
\begin{aligned}
& 2(x-1)^2 = 8 \\
\Leftrightarrow \quad & x - 1 = \pm\sqrt{4} \\
\Leftrightarrow \quad & x = -1 \ \vee \ x = 3
\end{aligned}
$$



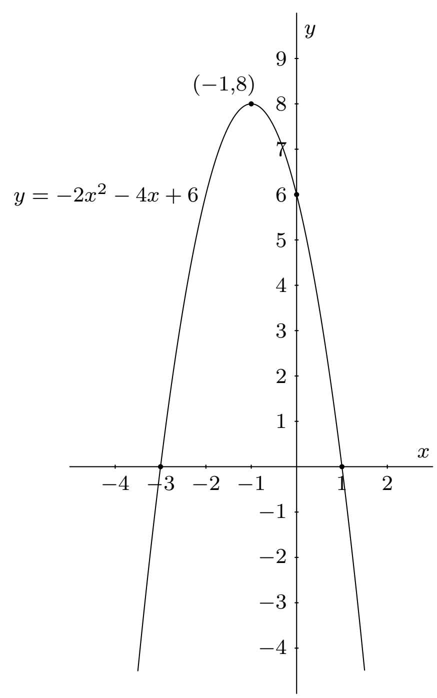
2b. $f(x) = -2x^2 - 4x + 6$

$$
\begin{aligned}
& -2x^2 - 4x + 6 \\
= \quad & -2[x^2 + 2x - 3] \quad \{\text{kwadraatafsplitsen}\} \\
= \quad & -2[(x+1)^2 - 1 - 3] \\
= \quad & -2[(x+1)^2 - 4] \\
= \quad & -2(x+1)^2 + 8
\end{aligned}
$$

Dus $f(x) = -2(x+1)^2 + 8$ (bergparabool).

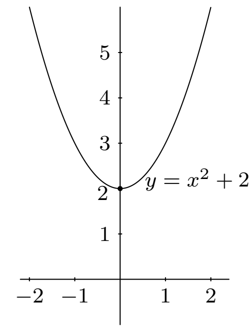
symmetrieas: $x = -1$
minimum: $y = 8$ (voor $x = -1$)
nulpunten:

$$
\begin{aligned}
& 2(x+1)^2 = 8 \\
\Leftrightarrow \quad & x + 1 = \pm\sqrt{4} \\
\Leftrightarrow \quad & x = -3 \ \vee \ x = 1
\end{aligned}
$$



Merk op dat de grafiek van opgave 2b ontstaat uit die van opgave 2a door puntspiegelen in de oorsprong: punt (x, y) ligt op de bovenste grafiek als punt $(-x, -y)$ op de onderste grafiek ligt. Als je in $y = 2x^2 - 4x - 6$ de x door $-x$ en de y door $-y$ vervangt, dan krijg je:
$-y = 2(-x)^2 - 4 \cdot -x - 6$, dus inderdaad $y = -2x^2 - 4x + 6$.

2c. $f(x) = x^2 + 2$



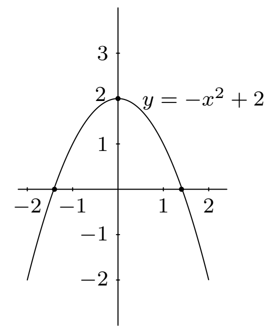
De grafiek wordt verkregen uit die van $y = x^2$ door over afstand 2 naar boven te verschuiven.

symmetrieas: $x = 0$

minimum: 2

Er zijn geen nulpunten.

2d. $f(x) = -x^2 + 2$



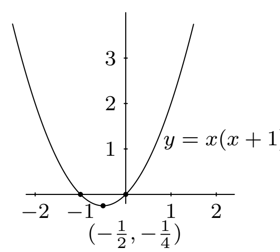
De grafiek wordt verkregen uit die van $y = -x^2$ door over afstand 2 naar boven te verschuiven.

symmetrieas: $x = 0$

maximum: 2

nulpunten: $x = -\sqrt{2}$ en $x = \sqrt{2}$.

2e. $f(x) = x(x + 1)$

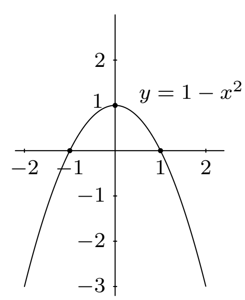


De nulpunten zijn $x = 0$ en $x = -1$.

De symmetrieas ligt daartussen: $x = -\frac{1}{2}$

minimum: $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$

2f. $f(x) = 1 - x^2$



Herschrijf als $f(x) = 1 - x^2 = (1 + x)(1 - x)$

De nulpunten zijn $x = -1$ en $x = 1$.

De symmetrieas ligt daartussen: $x = 0$

maximum: $f(0) = 1$

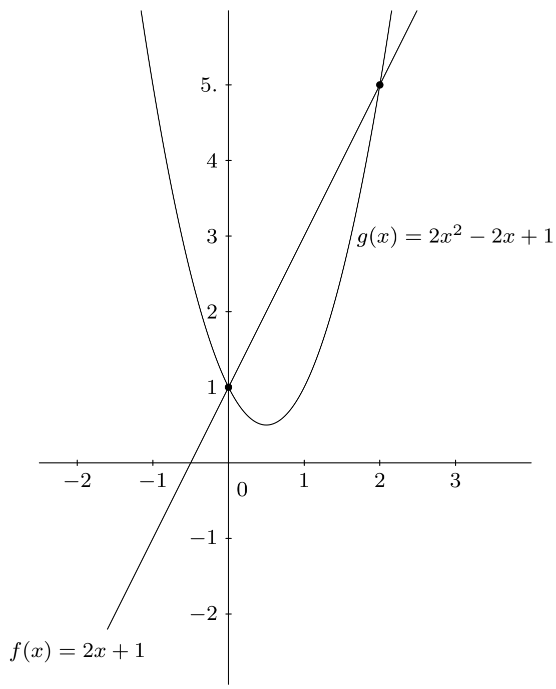
Merk op dat deze grafiek hetzelfde is als die in opgave 2d, afgezien van een verschuiving over 1 naar beneden.

3a. $f(x) = 2x + 1$ heeft als grafiek een rechte lijn met helling 2.
Uit $f(-1) = -2 + 1 = -1$ en $f(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ volgt dat de grafiek door de punten $(-1, -1)$ en (1,3) gaat.

De grafiek van $g(x) = 2x^2 - 2x + 1$ heeft als grafiek een dalparabool. Kwadraatafsplitsen levert:

$$2x^2 - 2x + 1 = 2[x^2 - x + \tfrac{1}{2}] = 2[(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4}] = 2(x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{2}$$

De symmetrieas is $x = \frac{1}{2}$, de top is $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ en er zijn geen nulpunten.



3b. Voor snijpunten moet gelden $g(x) = f(x)$:

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 2x + 1 = 2x + 1 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x^2 - 4x = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2x(x - 2) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 0 \ \vee \ x = 2 \end{aligned}$$

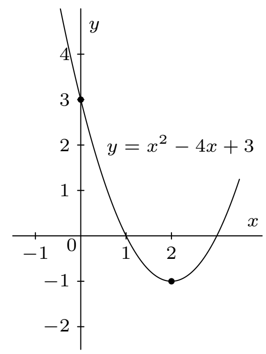
Omdat $f(0) = 1$ en $f(2) = 5$, zijn de snijpunten (0,1) en (2,5).

3c. De ongelijkheid is $g(x) \leq f(x)$. Uit de grafiek blijkt dat de grafiek van g onder de grafiek van f ligt op het interval [0,2]. Dus geldt:

$$2x^2 - 2x + 1 \leq 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq x \leq 2$$

9.4.1

1a. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ op $[0, 2]$



Door kwadraatafsplitsen vind je:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 4 + 3 = (x-2)^2 - 1$$

De grafiek van f is dus een dalparabool met minimum -1 voor $x = 2$.

Op het interval [0,2] wordt het minimum aangenomen in 2.
Verder is $f(0) = 3$, dus het bereik is $[-1, 3]$, zie ook de grafiek hiernaast.

1b. $f(x) = \dfrac{0{,}4x - 1}{3}$ op $\langle 0, 3]$

Schrijf het domein $0 < x \leq 3$ als volgt om:

$$\begin{array}{lll} & 0 < x \leq 3 & \{\text{maal } 0{,}4\} \\ \Leftrightarrow & 0 < 0{,}4x \leq 1{,}2 & \{\text{min } 1\} \\ \Leftrightarrow & -1 < 0{,}4x - 1 \leq 0{,}2 & \{\text{deel door 3, lees 0,2 als } \tfrac{1}{5}\} \\ \Leftrightarrow & -\tfrac{1}{3} < \dfrac{0{,}4x-1}{3} \leq \tfrac{1}{15} & \end{array}$$

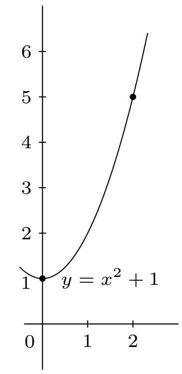
Blijkbaar is het bereik $\langle -\frac{1}{3}, \frac{1}{15}]$.

Je kunt dit ook vinden door te gebruiken dat de grafiek van f een rechte lijn is.
Uit $f(0) = -\frac{1}{3}$ en $f(3) = \frac{1}{15}$ volgt dan hetzelfde resultaat.

1c. $f(x) = 2x + 1$ op $[0, 7\rangle$

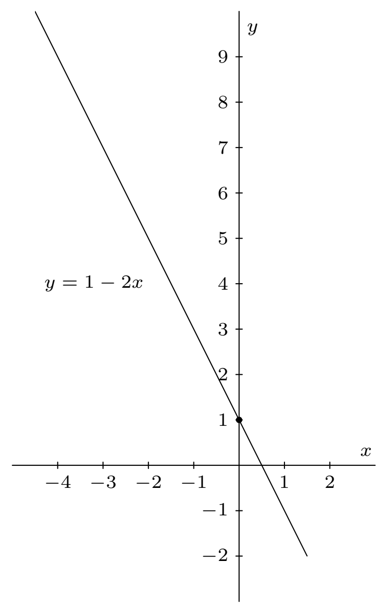
De grafiek van f is een stijgende rechte lijn (de helling is 2).
Uit $f(0) = 1$ en $f(7) = 15$ volgt dat het bereik $[1, 15\rangle$ is.

1d. $f(x) = x^2 + 1$ op $[2, \infty\rangle$



De grafiek van f is een dalparabool met minimum 1.
Op $[0, \infty\rangle$ is de functie stijgend (zie de grafiek).
Samen met $f(2) = 5$ volgt hieruit dat het bereik $[5, \infty\rangle$ is.

1e. $f(x) = 1 - 2x$ op $\langle -\infty, 0]$



De grafiek van f is een dalende rechte lijn (helling -2).
Uit $f(0) = 1$ volgt dat het bereik $[1, \infty\rangle$ is.
Zie ook de grafiek.

f. $f(x) = -x^2 + 10$ op $\mathbb{R}$

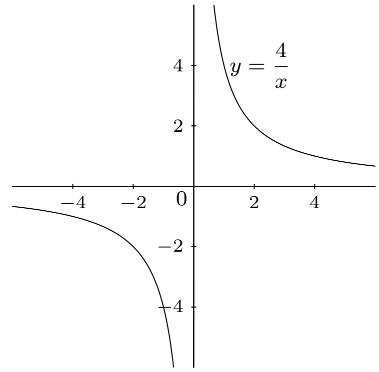
De grafiek van f is een bergparabool met top (0,10).
Het maximum is dus 10 en dat levert als bereik $\langle -\infty, 10]$.

Of met deze afleiding:

$$
\begin{array}{lll}
 & x^2 \geq 0 & \{\text{maal } -1\text{, teken klapt om}\} \\
\Leftrightarrow & -x^2 \leq 0 & \{\text{plus } 10\} \\
\Leftrightarrow & -x^2 + 10 \leq 10 & \{\text{definitie interval}\} \\
\Leftrightarrow & -x^2 + 10 \in \langle -\infty, 10] & \{f(x) = -x^2 + 10\} \\
\Leftrightarrow & \text{Het domein van } f \text{ is } \langle -\infty, 10]. &
\end{array}
$$

9.5.1

1a. $y = \dfrac{4}{x}$



De noemer is 0 voor $x = 0$ en $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{4}{x} = \infty$ en $\lim\limits_{x \uparrow 0} \dfrac{4}{x} = -\infty$

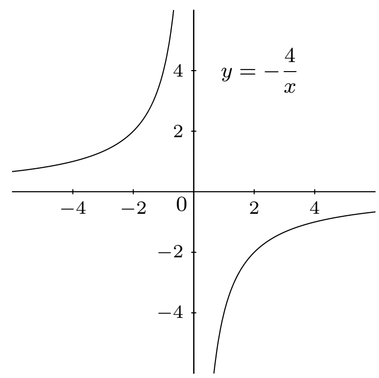
Dus $x = 0$ (de y-as) is verticale asymptoot.

$\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{4}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4}{x} = 0$

Dus $y = 0$ (de x-as) is horizontale asymptoot.

In feite is de grafiek dezelfde als die van $y = \dfrac{1}{x}$,
maar dan een factor 4 in de y-richting groter.

1b. $y = -\dfrac{4}{x}$

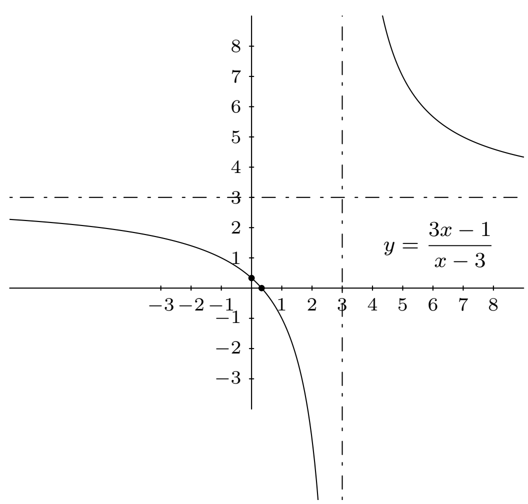


De grafiek hiervan is die van $y = \dfrac{4}{x}$ in de x-as gespiegeld.

Vervang je in $y = \dfrac{4}{x}$ de x door $-x$, dan krijg je inderdaad:

$$y = \frac{4}{-x} = -\frac{4}{x}$$

1c. $y = \dfrac{3x - 1}{x - 3}$



De noemer is 0 voor $x = 3$ en er geldt:

$\lim\limits_{x \downarrow 3} \dfrac{3x - 1}{x - 3} = \infty$ en $\lim\limits_{x \uparrow 3} \dfrac{3x - 1}{x - 3} = -\infty$

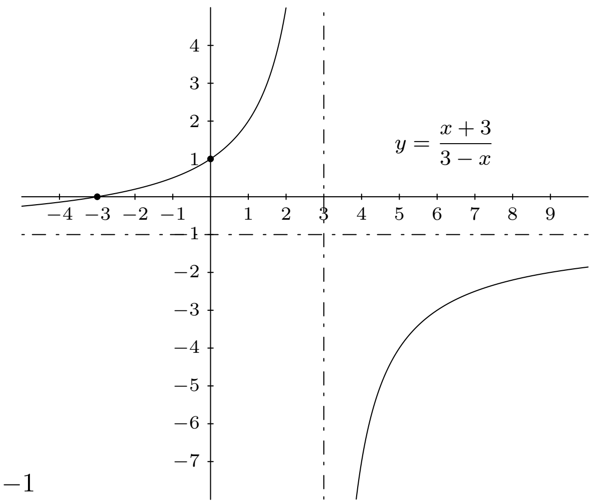
Dus de lijn $x = 3$ is verticale asymptoot.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x - 1}{x - 3} = \lim_{x \to \infty} \frac{3 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = \frac{3 - 0}{1 - 0} = 3$$

Evenzo: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3x - 1}{x - 3} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = \dfrac{3 - 0}{1 - 0} = 3$

Dus $y = 3$ is horizontale asymptoot.
Snijpunt x-as: $(\frac{1}{3}, 0)$ en snijpunt y-as: $(0, \frac{1}{3})$.

1d. $y = \dfrac{x+3}{3-x}$



De noemer is 0 voor $x = 3$ en er geldt:

$\lim\limits_{x \downarrow 3} \dfrac{x+3}{3-x} = -\infty$ en $\lim\limits_{x \uparrow 3} \dfrac{x+3}{3-x} = \infty$

Dus lijn $x = 3$ is verticale asymptoot.

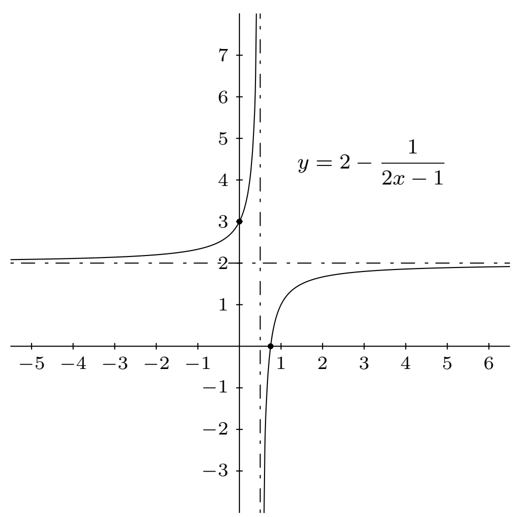
$$\lim_{x \to \infty} \frac{x+3}{3-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 + \frac{3}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = \frac{1+0}{0-1} = -1$$

Evenzo: $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+3}{3-x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 + \frac{3}{x}}{\frac{3}{x} - 1} = \dfrac{1+0}{0-1} = -1$

Dus $y = -1$ is horizontale asymptoot.

Snijpunt x-as: $(-3{,}0)$ en snijpunt y-as: $(0{,}1)$.

1e. $y = 2 - \dfrac{1}{2x-1}$



De noemer is 0 voor $x = \frac{1}{2}$ en er geldt:

$\lim\limits_{x \downarrow \frac{1}{2}} 2 - \dfrac{1}{2x-1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \uparrow \frac{1}{2}} 2 - \dfrac{1}{2x-1} = \infty$

Dus de lijn $x = \frac{1}{2}$ is verticale asymptoot.

$\lim\limits_{x \to \infty} 2 - \dfrac{1}{2x-1} = 2$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} 2 - \dfrac{1}{2x-1} = 2$

Dus de lijn $y = 2$ is horizontale asymptoot.

Snijpunt y-as: $(0{,}3)$ en snijpunt x-as: $(\frac{3}{4}{,}0)$.

1f. $y = 3 + \dfrac{1}{1-x}$

De noemer is 0 voor $x = 1$ en er geldt:

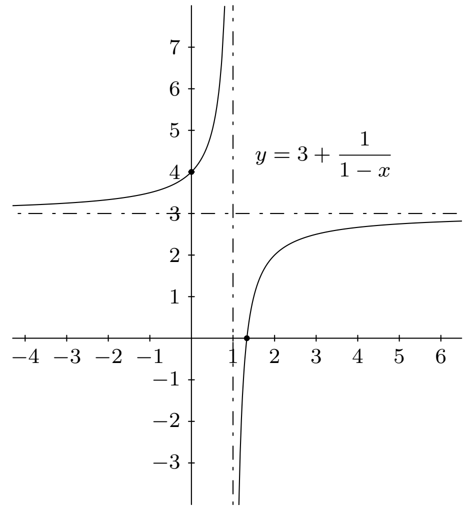
$\lim\limits_{x \downarrow 1} 3 + \dfrac{1}{1-x} = -\infty$ en $\lim\limits_{x \uparrow 1} 3 + \dfrac{1}{1-x} = \infty$

Dus de lijn $x = 1$ is verticale asymptoot.

$\lim\limits_{x \to \infty} 3 + \dfrac{1}{1-x} = 3$ en $\lim\limits_{x \to -\infty} 3 + \dfrac{1}{1-x} = 3$

Dus de lijn $y = 3$ is horizontale asymptoot.

Snijpunt y-as: (0,4) en snijpunt x-as: ($\frac{4}{3}$,0).



2.

a. $\lim\limits_{x \downarrow 1} \dfrac{1}{x-1} = \infty$

b. $\lim\limits_{x \downarrow 1} \dfrac{1}{1-x} = -\infty$

c. $\lim\limits_{x \uparrow 1} \dfrac{1}{x-1} = -\infty$

d. $\lim\limits_{x \downarrow 0} \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{1}{0-1} = -1$

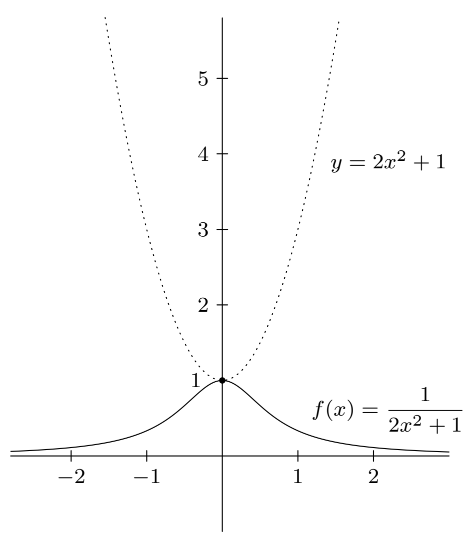
e. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x-1}{1-x} = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2 - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x} - 1} = \dfrac{2-0}{0-1} = -2$

f. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1-2x}{x+2} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\frac{1}{x} - 2}{1 + \frac{2}{x}} = \dfrac{0-2}{1+0} = -2$

3a.
De grafiek van $y = 2x^2 + 1$ is een dalparabool
met minimum 1 voor $x = 0$.

3b.
De grafiek van $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$ volgt
uit die van de parabool.

3c.
Het maximum van f is gelijk is aan het omgekeerde van
het minimum van de parabool, dus 1 (zie ook de grafiek).



4. De grafiek van $V = \dfrac{1}{t^2 - 2t}$

We bekijken als hulpfunctie $h(t) = t^2 - 2t$, dan is $V = \dfrac{1}{h(t)}$. De grafiek van h is gestippeld getekend.

De nulpunten van h volgen uit $t^2 - 2t = t(t-2) = 0$, dus $t = 0$ en $t = 2$.
Dit zijn de verticale asymptoten van V.

De snijpunten van de grafieken van h en V vind je uit de vergelijking $h(t) = \dfrac{1}{h(t)}$.
Deze is equivalent met $h(t)^2 = 1$, dus $h(t) = 1 \vee h(t) = -1$. Uitwerking geeft:

$$\begin{array}{lll} t^2 - 2t = 1 & \vee\ t^2 - 2t = -1 & \{\text{kwadraatafsplitsen}\} \\ (t-1)^2 = 2 & \vee\ (t-1)^2 = 0 & \\ t = 1 \pm \sqrt{2} & \vee\ t = 1 & \end{array}$$

De snijpunten zijn dus $(1-\sqrt{2},1)$, $(1+\sqrt{2},1)$ en $(1,-1)$.

De x-as is horizontale asymptoot en op interval $\langle 0,2 \rangle$ heeft V als maximum -1.